

Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 25 settembre 2025

1. Studiare la monotonia delle funzioni seguenti.

(a) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan(x^{1/4})$

(b) $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $h: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $h(x) = e^{x^2}$

2. Si consideri la funzione $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right|.$$

Riscrivere la funzione come funzione definita a tratti e tracciarne il grafico.

3. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di ognuno dei seguenti insiemi. Stabilire anche se ciascun insieme ammette massimo e se ammette minimo.

(a) $A = \{\arcsin(1 - x) : x \in [1, 2)\}$

(b) $B = \left\{ \cos(2x) : x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right] \right\}$

4. (Tema d'esame 8 luglio 2024) Si consideri la funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{2 + \sin x}}{\arctan(x - 4)} \log \left(\frac{1}{(x - 2)^2} \right).$$

Determinare il dominio di f e per quali $x \in \text{dom}(f)$ si ha $f(x) \leq 0$.

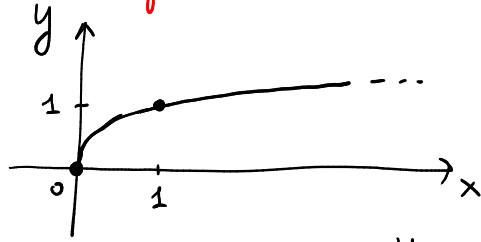
5. Determinare il dominio della funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2 \sin x) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2} \cos x)}.$$

Studiare la monotonia di

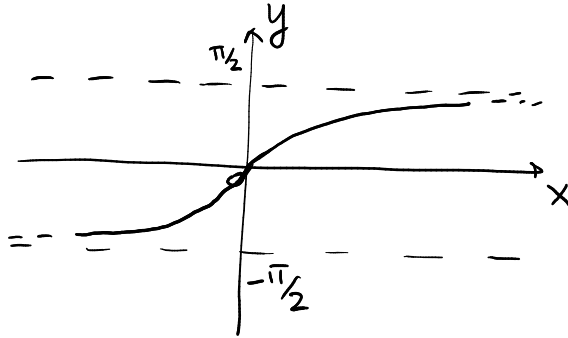
$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan(x^{1/4})$

$$h(x) = x^{1/4}$$



h è strett. crescente

$$g(x) = \arctan x$$



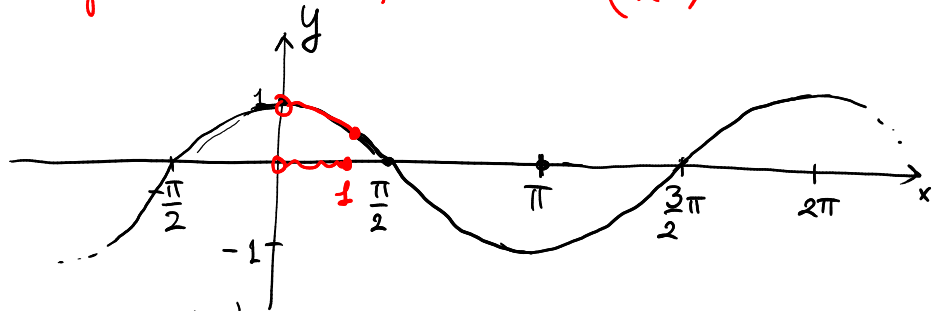
g è strettamente crescente

Dato che $f(x) = g(h(x))$ e che g e h sono entrambe strett. crescente, si ha che f è strett. crescente

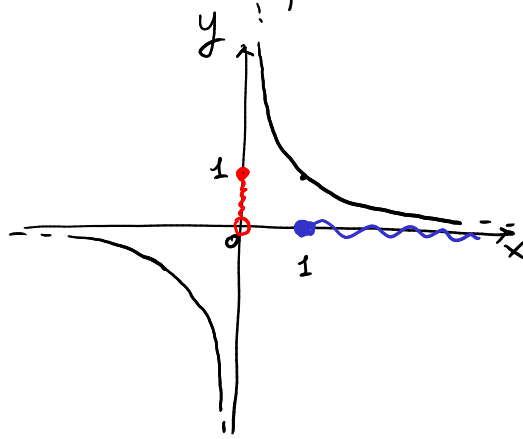
Studiare la monotonia di

$f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$g(x) = \cos x$$



$$h(x) = \frac{1}{x}$$



g non è monotona in $\mathbb{R}$

h non è monotona in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

h è strett. decrescente in $[1, +\infty)$

$$f(x) = g(h(x)) \text{ per } x \in [1, +\infty)$$

Se $x \in [1, +\infty)$, allora $h(x) = \frac{1}{x} \in (0, 1]$

Se $x \in (0, 1]$, allora $g(x) = \cos x$ è strett. decrescente

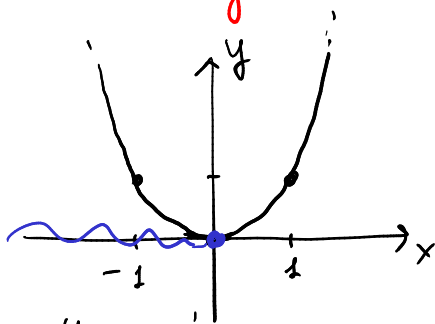
Diunque $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ è strett. crescente.}$$

Studiare la monotonia di

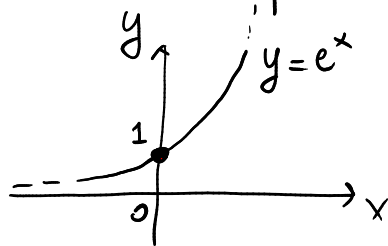
$f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{x^2}$

$$h(x) = x^2$$



h non è monotona in $\mathbb{R}$
 h è strett. decrescente
in $(-\infty, 0]$

$$g(x) = e^x$$



g è strett. crescente in $\mathbb{R}$

Dato che $f(x) = g(h(x))$, quindi è composizione di una funz. strett. crescente e di una strett. decrescente, allora f è strett. decrescente in $(-\infty, 0]$.

Si consideri la funzione $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

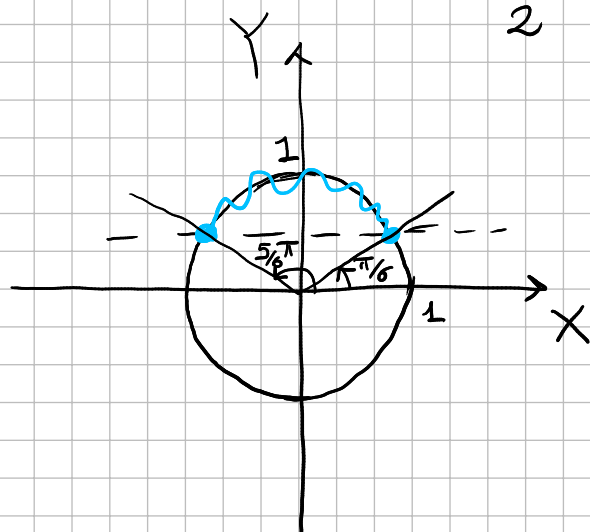
$$f(x) = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right|.$$

Riscrivere la funzione come funzione definita a tratti e tracciarne il grafico.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \frac{1}{2} & \text{se } \sin x - \frac{1}{2} \geq 0 \\ \frac{1}{2} - \sin x & \text{se } \sin x - \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

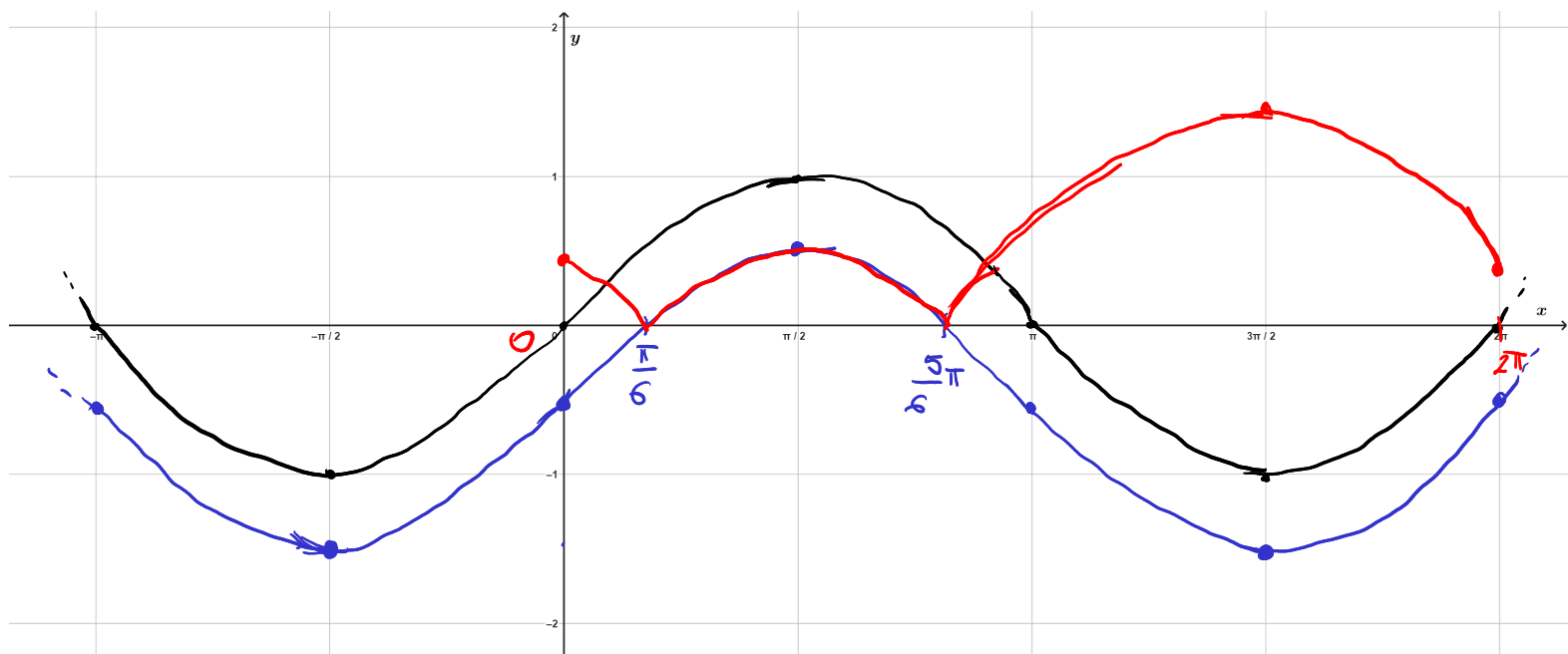
Dobbiamo risolvere $\sin x - \frac{1}{2} \geq 0$ con $x \in [0, 2\pi]$



$$\sin x \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \frac{1}{2} & \text{se } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \\ \frac{1}{2} - \sin x & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{6} < x \leq 2\pi \end{cases}$$



$$x \mapsto \sin x$$

$$x \mapsto \sin x - \frac{1}{2}$$

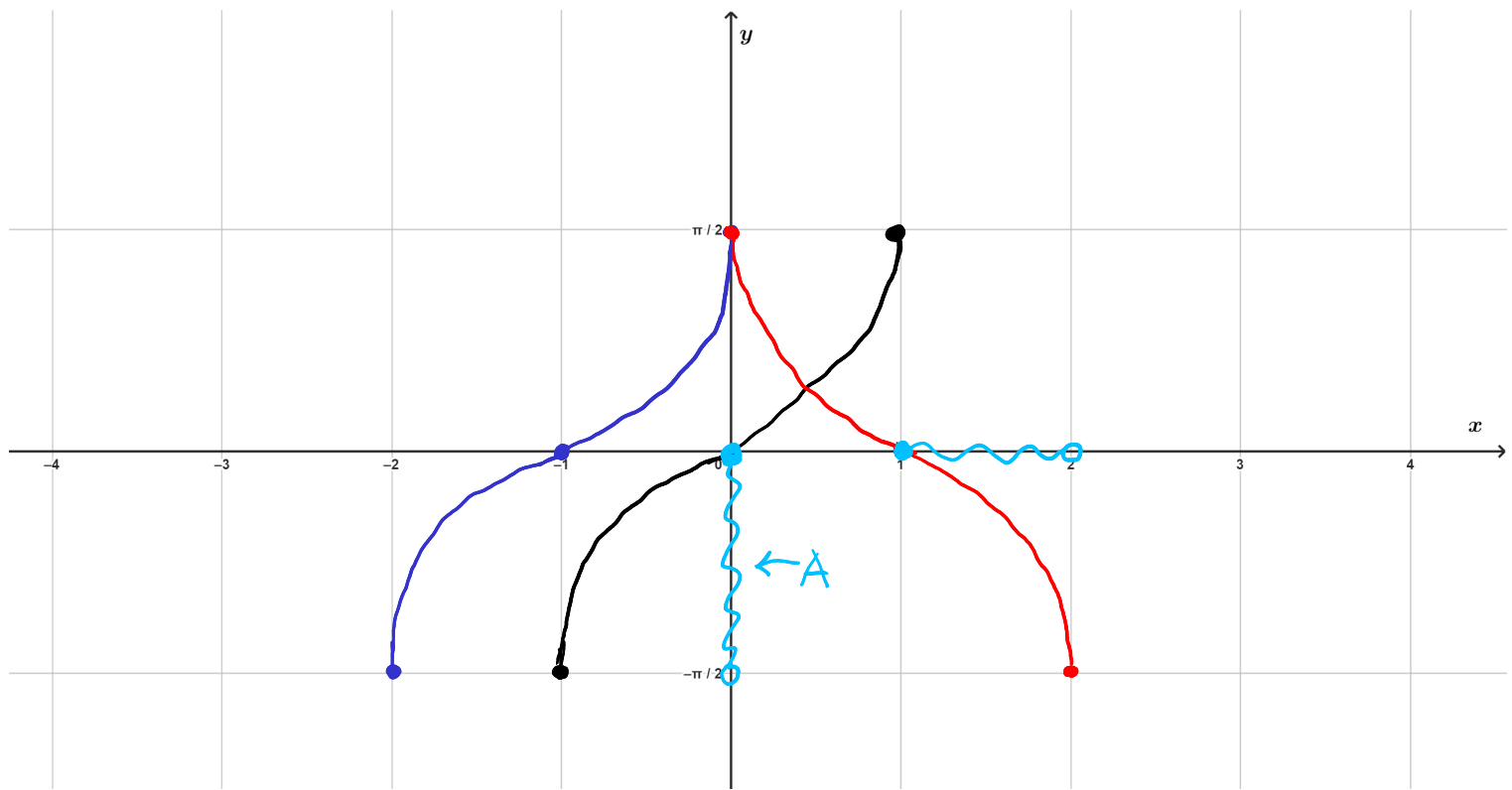
Traslazione di vettore $(0, -\frac{1}{2})$
 "Mi sposto in basso di $\frac{1}{2}$ unità"

$$x \mapsto \left| \sin x - \frac{1}{2} \right|, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Determinare minoranti, maggioranti, inf e sup di

$$A = \{\arcsin(1-x) : x \in [1, 2)\} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$x \mapsto \arcsin(x)$$

↓ Traslazione di vettore $(-1, 0)$

$$x \mapsto \arcsin(1+x)$$

↓ Simmetria assiale rispetto all'asse delle ordinate

$$x \mapsto \arcsin(1-x)$$

I minoranti di A sono i numeri reali $\leq -\frac{\pi}{2}$

$$\inf A = -\frac{\pi}{2}$$

$-\frac{\pi}{2} \notin A$, quindi A non ha minimo

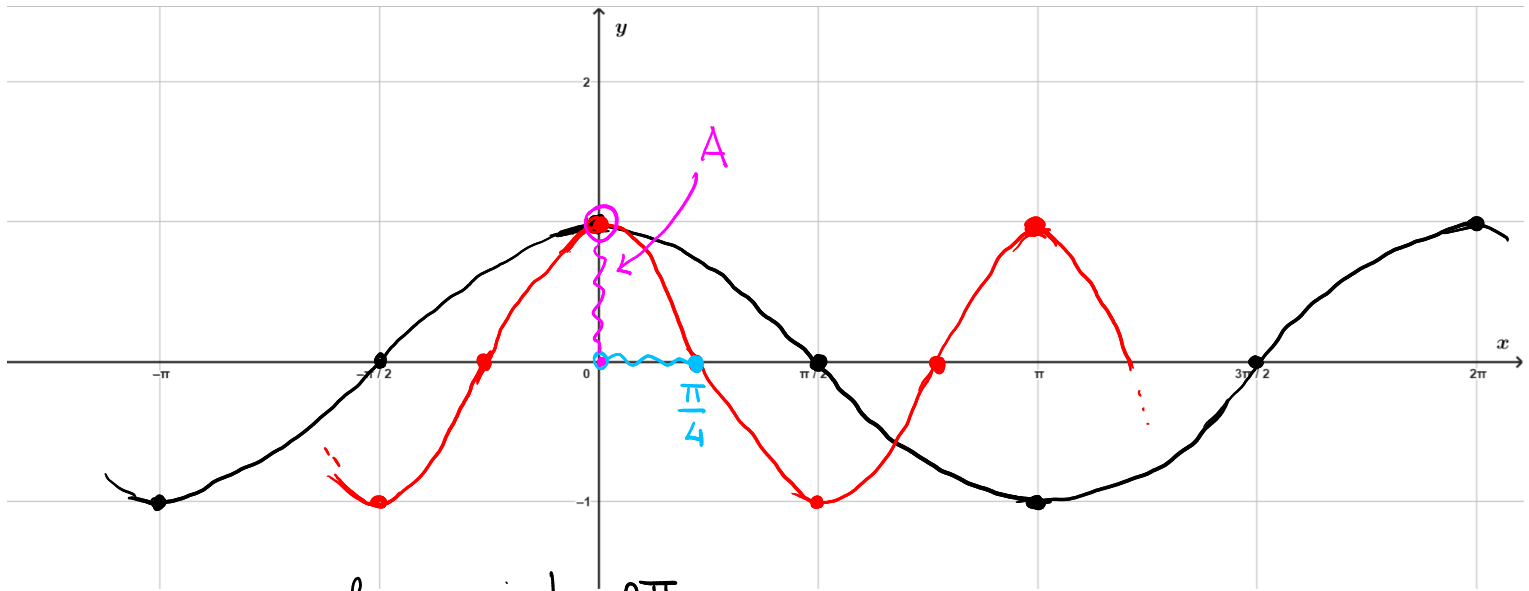
I maggioranti di A sono i numeri reali ≥ 0

$$\sup A = 0$$

$$0 \in A, \text{ quindi } \max A = 0$$

Determinare minoranti, maggioranti, inf, sup di

$$B = \{ \cos(2x) : x \in (0, \frac{\pi}{4}] \} = [0, 1)$$



$\sim$ ha periodo 2π
 $x \mapsto \cos x$

$x \mapsto \cos(2x)$ $\swarrow$ Contrazione di fattore 2
lungo l'asse x

ξ
ha periodo π

$$B = [0, 1)$$

I minoranti di B sono i numeri reali ≤ 0
 $\inf B = 0$ e $\min B = 0$

I maggioranti di B sono i numeri reali ≥ 1
 $\sup B = 1$ e B non ha massimo

Tema esame 08/07/2024

$$f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{2 + \sin x}}{\arctan(x-4)} \log\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)$$

• Determinare $\text{dom}(f)$

• Determinare $A = \{x \in \text{dom}(f); f(x) \leq 0\}$

DOMINIO DI f

$$\begin{cases} 2 + \sin x \geq 0 \\ \arctan(x-4) \neq 0 \\ \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \\ (x-2)^2 \neq 0 \end{cases}$$

perché la radice quarta sia definita
perché il quoziente sia definito
perché il log sia definito

• $2 + \sin x \geq 0$

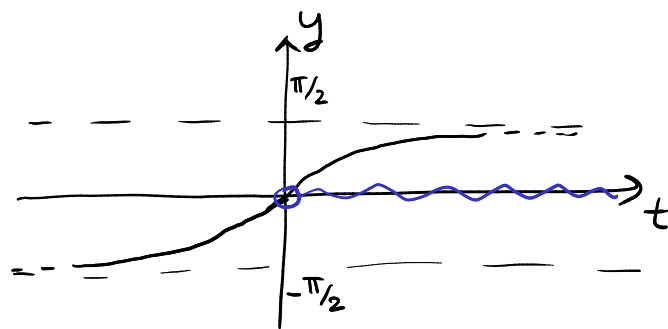
$$\sin x \geq -2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

• $\arctan(x-4) \neq 0$

$$x-4 \neq 0$$

$$x \neq 4$$

$$\sin: \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$



$$\arctan t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\arctan t > 0 \Leftrightarrow t > 0$$

• $(x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

• $\frac{1}{(x-2)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$

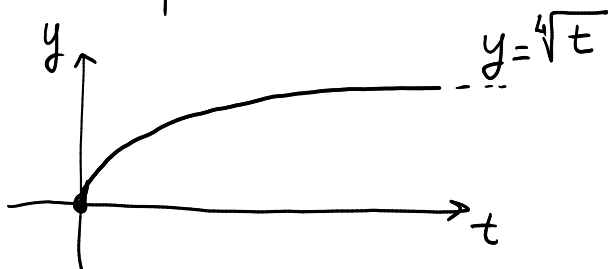
perché il num. è un numero
positivo e il den. è un
quadrato che si annulla
se e solo se $x=2$

$$\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{2, 4\}$$

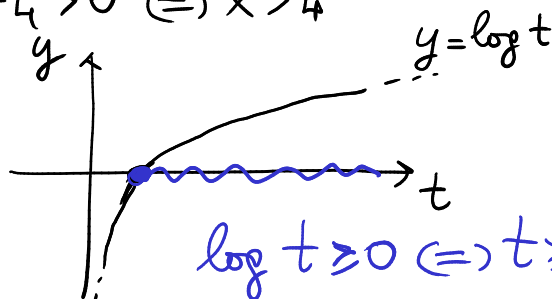
SEGNO DI f

$$\bullet \sqrt[4]{2 + \sin x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ perché } 2 + \sin x > 0$$



$$\bullet \arctan(x-4) > 0 \Leftrightarrow x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$$

$$\bullet \log\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right) \geq 0$$



$$\log t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} \geq 1$$

$$1 \geq (x-2)^2 \wedge x \neq 2$$

$$(x-2)^2 \leq 1 \wedge x \neq 2$$

$$-1 \leq x-2 \leq 1 \wedge x \neq 2$$

$$1 \leq x \leq 3 \wedge x \neq 2$$

Se $x \neq 2$, allora $(x-2)^2 > 0$
e moltiplicando entrambi i membri per $(x-2)^2$ si ottiene una disequazione equivalente nello stesso verso

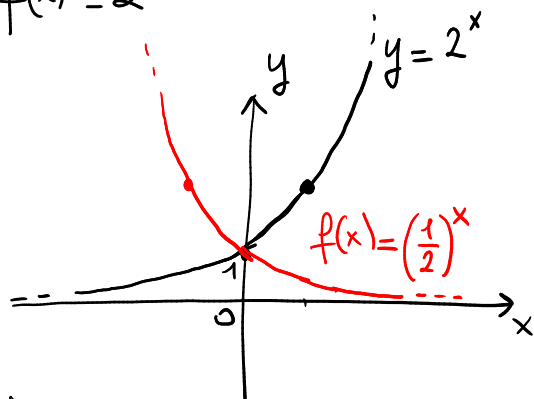
$$\begin{aligned} t^2 &\leq 1 \\ t^2 - 1 &\leq 0 \\ -1 &\leq t \leq 1 \end{aligned}$$

	1	2	3	4	
$\sqrt[4]{2 + \sin x}$	+	+	+	+	+
$\arctan(x-4)$	-	-	-	-	+
$\log\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)$	-	0	+	+	-
	+	0	-	0	+

$$A = [1, 2) \cup (2, 3] \cup (4, +\infty)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f(x) = 2^{-x}$$



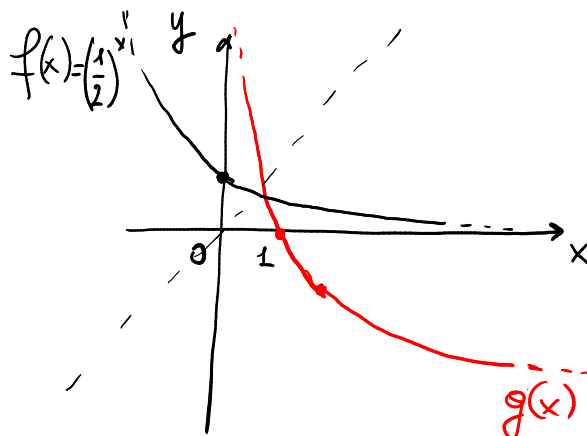
$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{im}(f) = (0, +\infty)$$

f è strett. decrescente

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

è l'inversa di $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



f e g hanno grafici simmetrici
risp. alla bisettrice del I e III
quadrante

$$\text{dom}(g) = \text{im}(f) = (0, +\infty)$$

$$\text{im}(g) = \text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

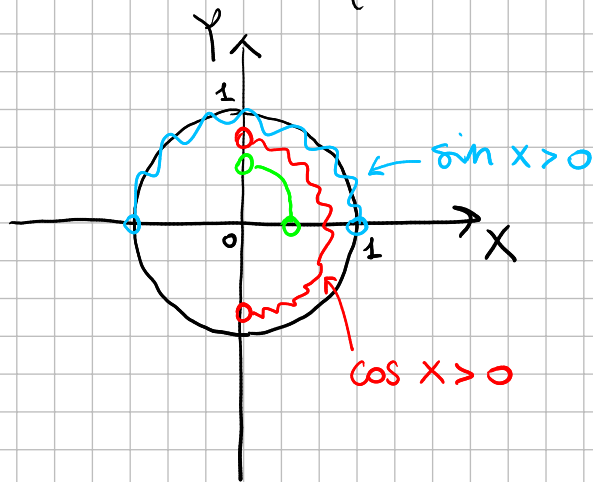
Determinare il dominio della funzione definita

$$da f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2\sin x) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}\cos x)}$$

$$\begin{cases} 2\sin x > 0 \\ \sqrt{2}\cos x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(2\sin x) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}\cos x) \geq 0 \end{cases} \begin{array}{l} \sim \text{perché i logaritmi siano definiti} \\ \text{perché la radice quadrata abbia significato} \end{array}$$

Inizio a considerare il sistema

$$\begin{cases} 2\sin x > 0 \\ \sqrt{2}\cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

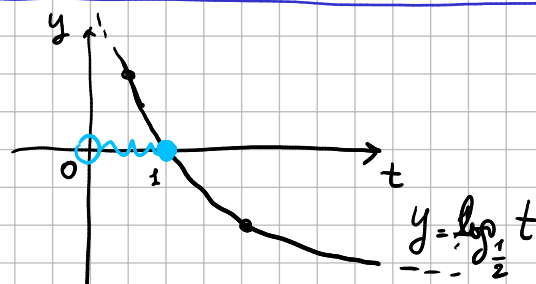


$$\log_{\frac{1}{2}}(2\sin x) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}\cos x) \geq 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2\sqrt{2}\sin x \cos x) \geq 0$$

$$0 < 2\sqrt{2}\sin x \cos x \leq 1$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy) \\ \forall a \in (0,1) \cup (1,+\infty), \forall x,y \in (0,+\infty)$$



$$\log_{\frac{1}{2}} t \geq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq 1$$

$$0 < \sqrt{2} \cdot \sin(2x) \leq 1$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot \sin(2x) > 0 \\ \sqrt{2} \cdot \sin(2x) \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2x) > 0 \\ \sin(2x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

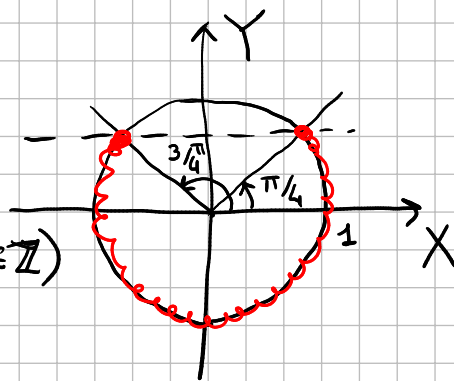
per ogni $x \in \mathbb{R}$

Osservazione. Abbiamo già ricavato che $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, quindi è soddisfatta la condizione $\sin(2x) > 0$

$$\sin(2x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

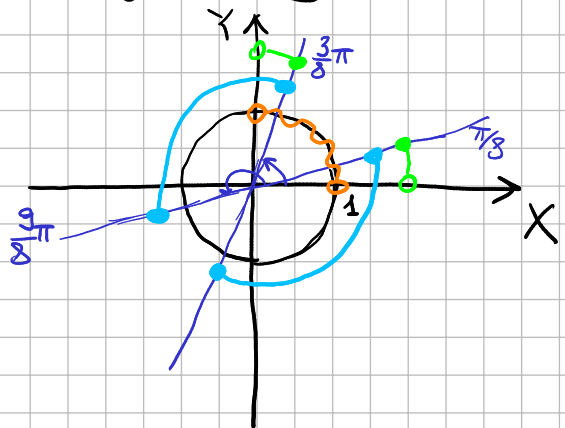
$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{9\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{3\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{9\pi}{8} + k\pi$$



Conclusione della risoluzione del sistema

$$\begin{cases} 0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{3\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{9\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$



$$\text{dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$