

Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 24 settembre 2025

1. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di ognuno dei seguenti insiemi. Stabilire anche se ciascun insieme ammette massimo e se ammette minimo.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \leq 0\}$

(b) $B = \{x^2 - 3 : x < 0\}$

(c) $C = \{(1 - x)^{\sqrt{3}} : x \in (0, 1]\}$

(d) $D = \{|2^{|x|} - 2| : 0 \leq x < \frac{1}{2}\}$

2. Determinare il dominio della funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt[4]{\log(\sqrt{4-x} - 2^x)}}.$$

3. Determinare il dominio della funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \log(9x - 2x^2 - 4) + \frac{1}{\sqrt{e^{2x+1} - e^x}} - \sqrt{\frac{(4x^2 - 20x + 25)(4x^2 - x - 3)}{[(x^3 + 1)^4 + \sqrt{7}](3x - 1 - 4x^2)}}.$$

4. (Tema d'esame 4 settembre 2024) Si consideri la funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{6\sqrt{2\pi - x}}{\cos x} \log\left(\frac{x}{|x| + 1}\right).$$

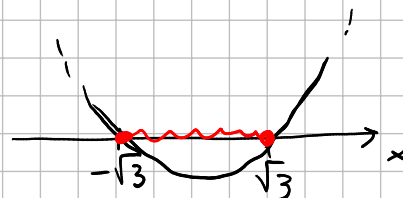
Determinare il dominio di f e per quali $x \in \text{dom}(f)$ si ha $f(x) > 0$.

paolo.scarpat@unibs.it

Ricevimento $\begin{cases} \text{in presenza} \\ \text{online} \\ \text{chiarimenti per e-mail} \end{cases}$

Determinare maggioranti, minoranti, sup, inf di
 $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \leq 0\}$

$$f(x) = x^2 - 3$$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Quindi } A = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

I minoranti di A sono i numeri reali $\leq -\sqrt{3}$
 $\inf A = -\sqrt{3}$

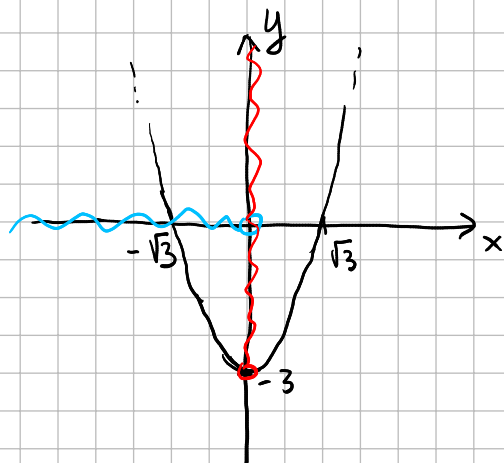
Dato che $-\sqrt{3} \in A$, si ha $\min A = -\sqrt{3}$

I maggioranti di A sono i numeri reali $\geq \sqrt{3}$

$$\sup A = \sqrt{3}$$

Dato che $\sqrt{3} \in A$, si ha $\max A = \sqrt{3}$

Determinare maggioranti, minoranti, inf, sup di
 $B = \{x^2 - 3 : x < 0\}$



$$B = (-3, +\infty)$$

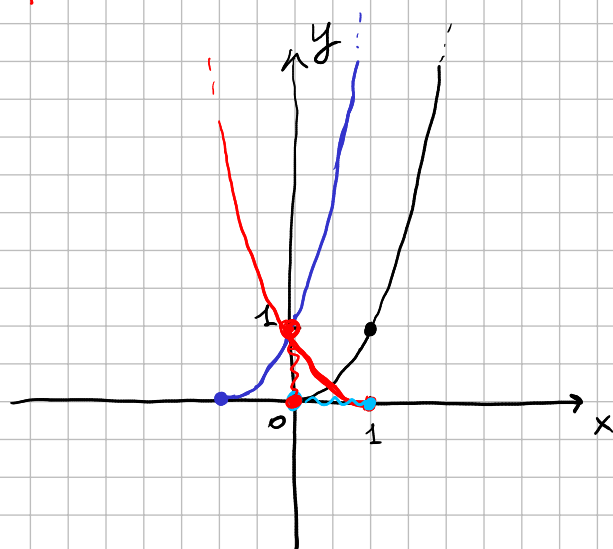
I minoranti di B sono i
numeri reali ≤ -3
 $\inf B = -3$

Dato che $-3 \notin B$, quindi B non
ha minimo

Nessun numero reale è maggiorante di B
 B è illimitato superiormente
 $\sup B = +\infty$ e B non ha massimo

Determinare minoranti, maggioranti, inf, sup di
 $C = \{ (1-x)^{\sqrt{3}} : x \in (0, 1] \}$

$$f(x) = (1-x)^{\sqrt{3}}$$



f è una funzione composta

$$g(x) = 1-x, \quad h(x) = x^{\sqrt{3}}$$

$$f(x) = h(g(x))$$

$\text{dom } g = \mathbb{R}$, $\text{dom } h = [0, +\infty)$
quindi f è definita se
e solo se $g(x) \in [0, +\infty)$

$$1-x \geq 0$$

$$x \leq 1$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, 1]$$

$$y = x^{\sqrt{3}}$$

$$y = (x+1)^{\sqrt{3}} \quad \begin{array}{l} \text{Traslazione} \\ \text{"a sinistra di 1 unità"} \end{array}$$

$$y = (1-x)^{\sqrt{3}} \quad \text{Riflessione risp. all'asse } y$$

Dal grafico si ricava $C = [0, 1)$

I minoranti di C sono i numeri reali ≤ 0

$$\inf C = 0$$

Dato che $0 \in C$, si ha $\min C = 0$

I maggioranti di C sono i numeri reali ≥ 1

$$\sup C = 1$$

Dato che $1 \notin C$, l'insieme C non ha massimo

Determinare minoranti, maggioranti, inf, sup di

$$D = \{ |2^{|x|} - 2| : 0 \leq x < \frac{1}{2} \}$$

$$f(x) = |2^{|x|} - 2|$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

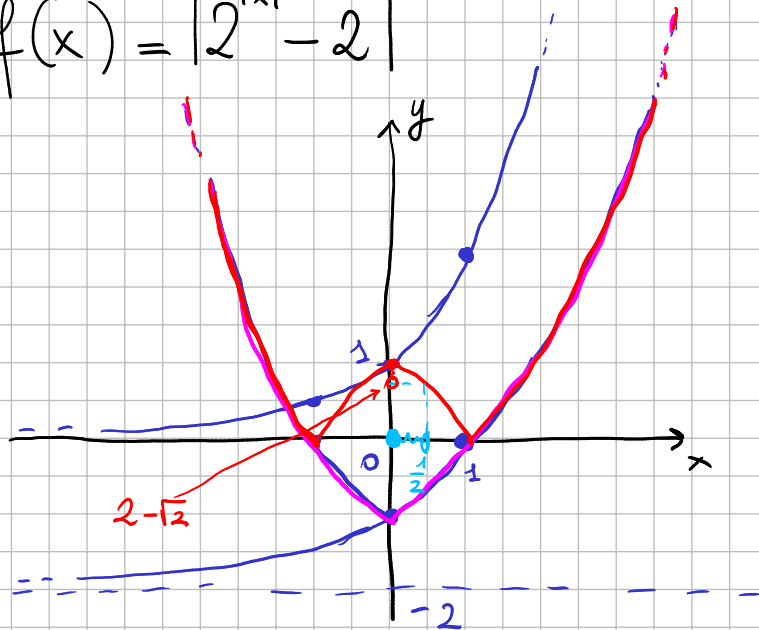
$$y = 2^x$$

$$y = 2^x - 2$$

$$y = 2^{|x|} - 2$$

$$y = |2^{|x|} - 2|$$

Traslazione
"in basso di
2 unità"



$$f\left(\frac{1}{2}\right) = |2^{\frac{1}{2}} - 2| = |\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$$

$$f(0) = |2^0 - 2| = 1$$

$$D = (2 - \sqrt{2}, 1]$$

D è l'immagine di $[0, \frac{1}{2})$
tramite f

I minoranti di D sono i numeri reali $\leq 2 - \sqrt{2}$
 $\inf D = 2 - \sqrt{2}$

Dato che $2 - \sqrt{2} \notin D$, l'insieme D non ha minimo

I maggioranti di D sono i numeri reali ≥ 1

$$\sup D = 1$$

Dato che $1 \in D$, si ha $\max D = 1$

Determinare il dominio della funzione

$f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt[4]{\log(\sqrt{4-x} - 2^x)}}.$$

NOTAZIONE

$\log$ INDICA IL LOGARITMO NATURALE

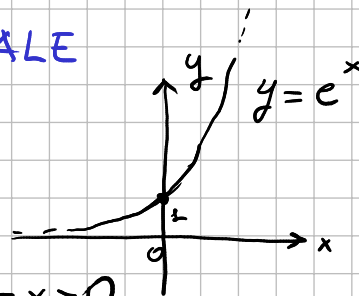
• e^x è definito $\forall x \in \mathbb{R}$

• $\sqrt{4-x}$ è definita se e solo se $\underline{4-x \geq 0}$

• 2^x è definito $\forall x \in \mathbb{R}$

• $\log(\sqrt{4-x} - 2^x)$ è definito se e solo se $\underline{\sqrt{4-x} - 2^x > 0}$

il radicando deve appartenere al dominio di $y = \sqrt{x}$
l'argomento del logaritmo deve appartenere al dominio di $y = \log x$



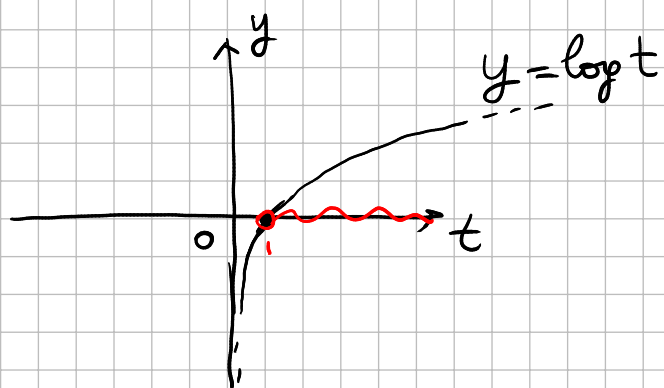
• $\sqrt[4]{\log(\sqrt{4-x} - 2^x)}$ è definito se e solo se $\log(\sqrt{4-x} - 2^x) \geq 0$

Determiniamo il dominio di f

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ \sqrt{4-x} - 2^x > 0 \\ \log(\sqrt{4-x} - 2^x) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ \sqrt{4-x} - 2^x > 0 \\ \sqrt{4-x} - 2^x > 1 \end{cases}$$

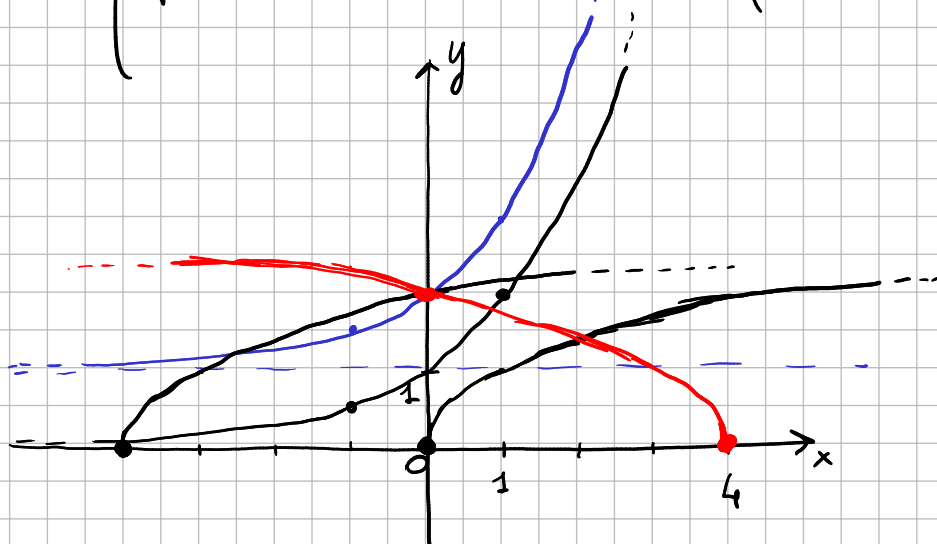
↑
radicando ≥ 0 perché appartenga al dom di $y = \sqrt{x}$
radicando $\neq 0$ perché la radice al den. sia $\neq 0$



$$\log t > 0 \Leftrightarrow t > 1$$

Nel sistema la terza disequazione, implica la seconda, quindi la seconda è superflua

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ \sqrt{4-x} - 2^x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ \sqrt{4-x} > 1+2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x < 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad x < 0$$



$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \\ y &= \sqrt{x+4} \\ y &= \sqrt{4-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2^x \\ y &= 2^x + 1 \end{aligned}$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, 0)$$

Determinare il dominio di $f(x) = \log(9x - 2x^2 - 4)$

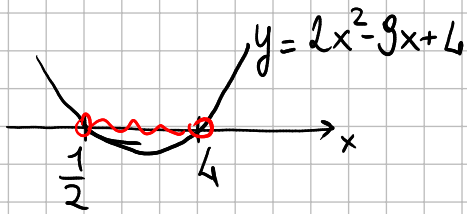
$9x - 2x^2 - 4 > 0$ perché il log naturale abbia significato

$$2x^2 - 9x + 4 < 0$$

$$2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$(x-4)(2x-1) = 0$$

$$x = 4 \vee x = \frac{1}{2}$$



$$\text{dom}(f) = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{(4x^2 - 20x + 25)(4x^2 - x - 3)}{\sqrt{(x^3 + 1)^4 + \sqrt{7}}(3x - 1 - 4x^2)}$$
 e studiarne il segno.

$$\begin{cases} \frac{(2x-5)^2(4x^2-x-3)}{\sqrt{(x^3+1)^4+\sqrt{7}}(3x-1-4x^2)} \geq 0 \\ \sqrt{(x^3+1)^4+\sqrt{7}}(3x-1-4x^2) \neq 0 \end{cases}$$

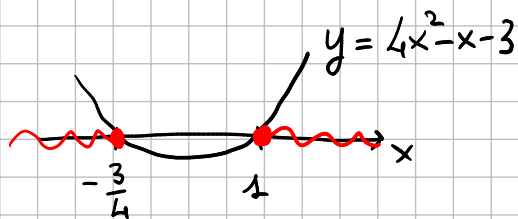
$$\bullet (2x-5)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (2x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\bullet 4x^2 - x - 3 \geq 0$$

$$4x^2 - x - 3 = 0$$

$$(x-1)(4x+3) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -\frac{3}{4}$$



$$x \leq -\frac{3}{4} \vee x \geq 1$$

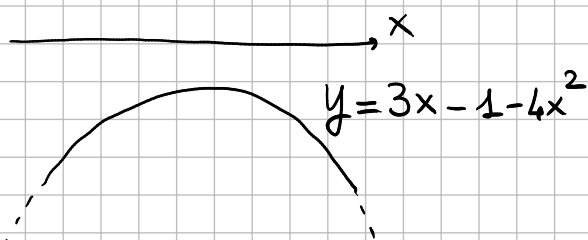
$$\bullet \underbrace{(x^3 + 1)^4}_{\geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}} + \sqrt{7} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3x - 1 - 4x^2 > 0 \quad \text{MAI}$$

$$3x - 1 - 4x^2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 16 < 0$$

L'equaz. non ha soluz. reali



$3x - 1 - 4x^2$ è negativo $\forall x \in \mathbb{R}$

	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{2}$	
$(2x-5)^2$	+	+	+	+
$4x^2 - x - 3$	+	-	+	+
$(x^3+1)^4 + \sqrt{7}$	+	+	+	+
$3x - 1 - 4x^2$	-	-	-	-
	-	+	-	-

$$\text{dom}(f) = \left[-\frac{3}{4}, 1\right] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \text{dom}(f) \setminus \left\{-\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{2}\right\}$$

$$\nexists x \in \text{dom}(f) : f(x) < 0$$

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log(9x - 2x^2 - 4) + \frac{1}{\sqrt{e^{2x+1} - e^x}} - \sqrt{\frac{(2x-5)^2(4x^2-x-3)}{[(x^3+1)^4 + \sqrt{7}](3x-1-4x^2)}}$$

Nei due esercizi sopra si è determinato per quali $x \in \mathbb{R}$ hanno significato il 1° e il 3° addendo.

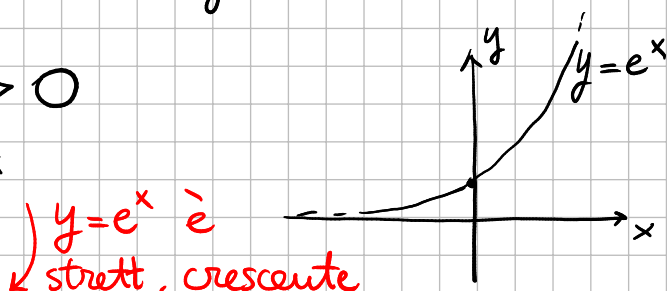
Il 2° addendo è definito se e solo se

$$e^{2x+1} - e^x > 0$$

$$e^{2x+1} > e^x$$

$$2x+1 > x$$

$$x > -1$$

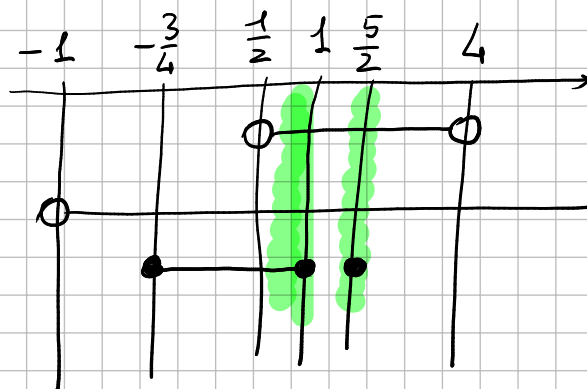


• Dominio di f

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} < x < 4 \\ x > -1 \end{array} \right.$$

$$x > -1$$

$$\left\{ -\frac{3}{4} \leq x \leq 1 \vee x = \frac{5}{2} \right.$$



$$\text{dom}(f) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right] \cup \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

Tema esame 04/09/2024

Determinare il dominio di

$$f(x) = \frac{6\sqrt{2\pi-x}}{\cos x} \log\left(\frac{x}{|x|+1}\right)$$

e determinare $A = \{x \in \text{dom}(f) : f(x) > 0\}$

DOMINIO DI f

$$\begin{cases} 2\pi - x \geq 0 & \text{perché la radice quadrata sia definita} \\ \cos x \neq 0 & \text{perché il 1° quoziente sia definito} \\ \frac{x}{|x|+1} > 0 & \text{perché } \log \text{ sia definito} \\ |x|+1 \neq 0 & \text{perché il quoziente all'argomento del} \\ & \text{logaritmo sia definito} \end{cases}$$

• $2\pi - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2\pi$

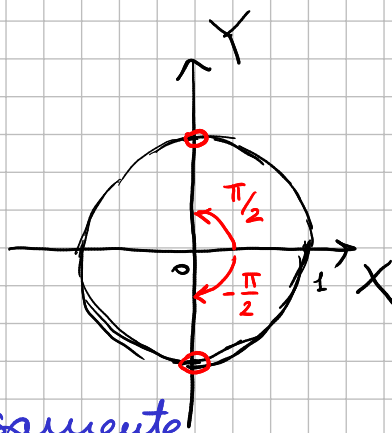
• $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

• $|x|+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Si può, più precisamente,
dire che $|x|+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\frac{x}{|x|+1} > 0 \Leftrightarrow x > 0$



$$\begin{cases} x \leq 2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x > 0 \end{cases}$$

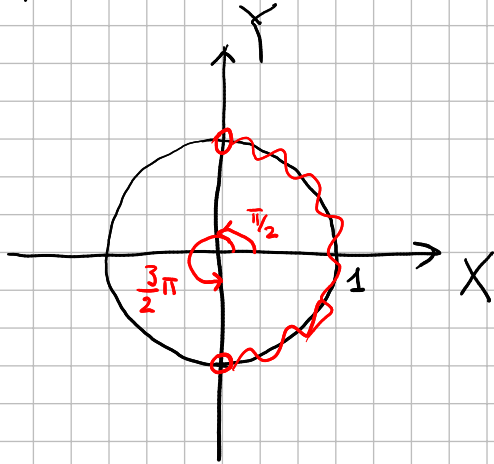
$$\text{dom}(f) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

SEGNO DI f

• $\sqrt{2\pi - x} > 0 \Leftrightarrow x < 2\pi$

• $\cos x > 0$

È sufficiente risolvere la disuguaglianza per $x \in [0, 2\pi]$

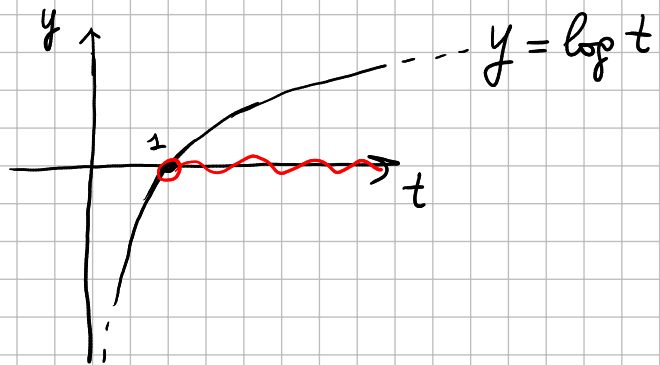


Se $x \in [0, 2\pi]$, si ha

$\cos x > 0$ per

$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$

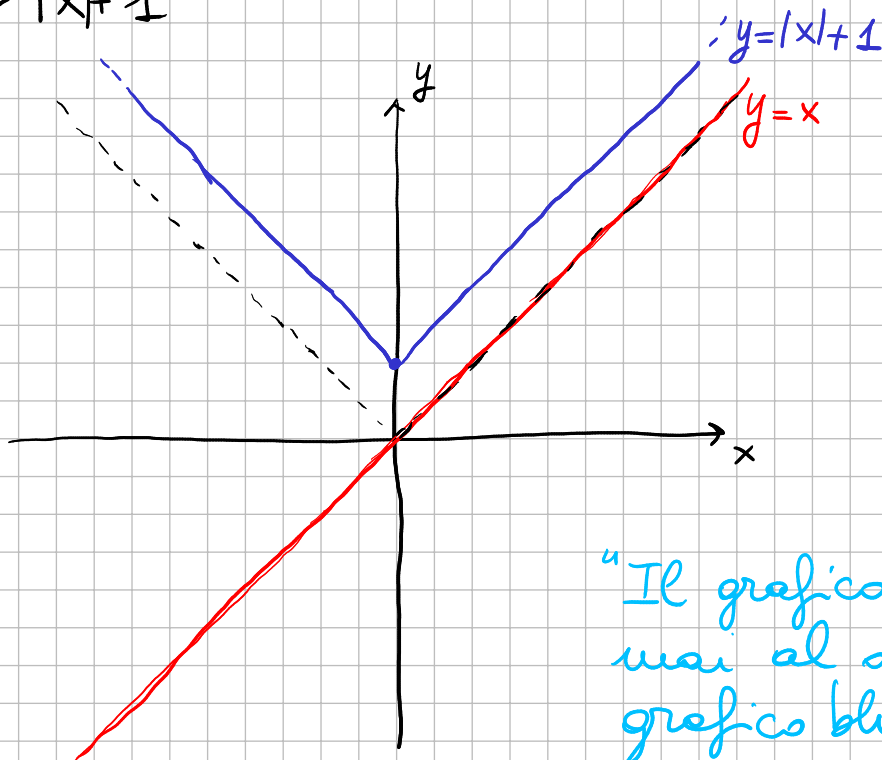
• $\log\left(\frac{x}{|x|+1}\right) > 0$



$\frac{x}{|x|+1} > 1$

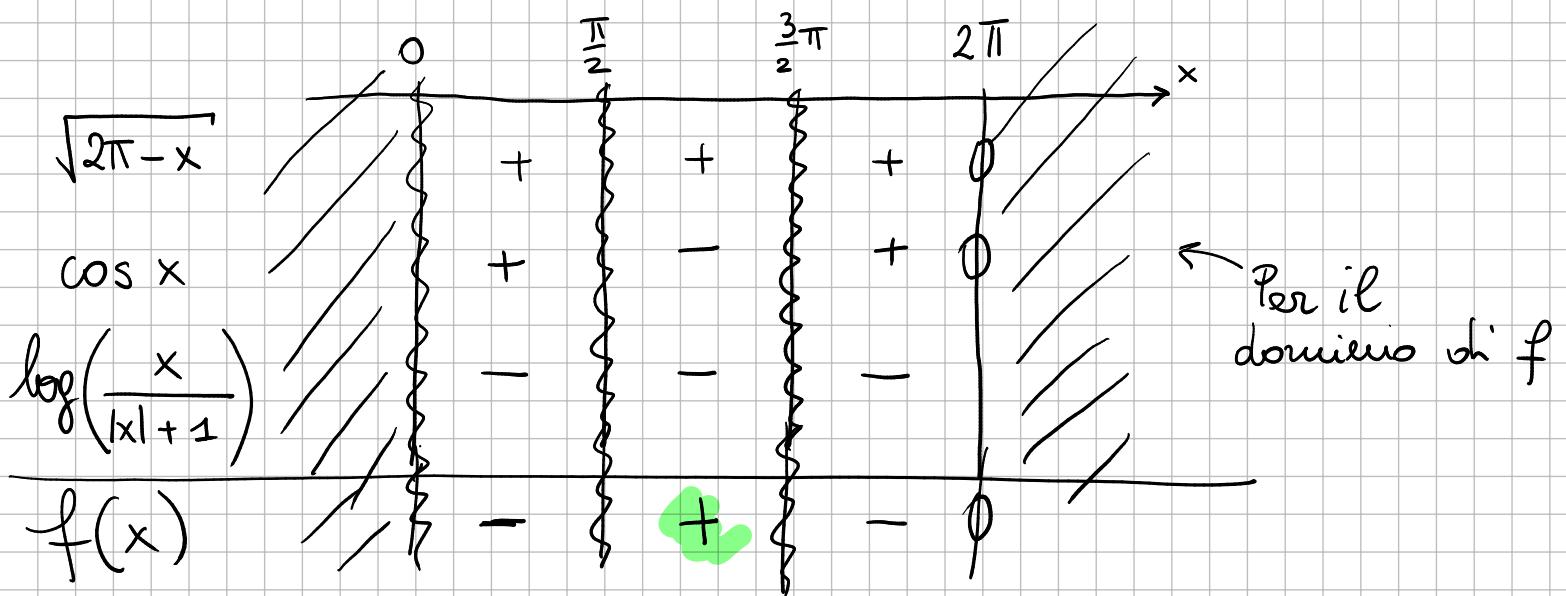
$|x|+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x > |x|+1$



"Il grafico rosso non è mai al di sopra del grafico blu"

$x > |x|+1$ non ha soluzioni reali.



$$A = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

Osserviamo anche che

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \vee x = 2\pi$$