Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 12 dicembre 2024

1. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log(x)\sqrt[3]{\log^2(x)}}\,dx.$

2. Calcolare l'area del trapezoide sotteso alla funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

sull'intervallo $[0, 4]$.

3. Calcolare l'area del trapezoide sotteso alla funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{\tan x} - 1}{\cos^2 x}$$

sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

4. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = -x^2 + x + 1.$$

5. Determinare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni

$$f(x) = \sqrt{2x} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x}{3 - x}.$$

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

7. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni

$$f(x) = \cos x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin(2x)$$

sull'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log(x)\sqrt[3]{\log^2(x)}}\,dx$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log(x)(\log(x))^{2/3}}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^{5/3}}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x(\log(x))^{5/3}}\,dx =$$

$\frac{1}{x}dx = dy$

Integraz. per sostituzione

$y = \varphi(x) = \log(x)$

$dy = \varphi'(x)dx = \frac{1}{x}dx$

$x = 2 \Rightarrow y = \log(2)$

$x = t \Rightarrow y = \log(t)$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_{\log(2)}^{\log(t)} \frac{1}{y^{5/3}}\,dy =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_{\log(2)}^{\log(t)} y^{-5/3}\,dy =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{y^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1}\right]_{\log(2)}^{\log(t)} = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{3}{2}\cdot y^{-\frac{2}{3}}\right]_{\log(2)}^{\log(t)} =$$

$$= -\frac{3}{2}\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{\underbrace{(\log(t))^{2/3}}_{\to+\infty}} - \frac{1}{(\log(2))^{2/3}}\right] =$$

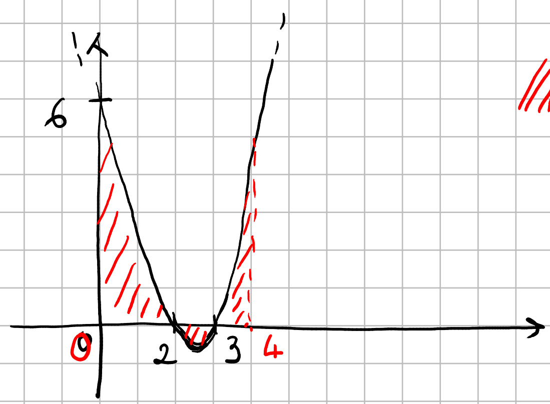
$$= -\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{(\log(2))^{2/3}}\right) = \frac{3}{2\sqrt[3]{\log^2(2)}}$$

Area del trapezoide sotteso a $f(x)=x^2-5x+6$ sull'intervallo $[0,4]$

$$\mathcal{A}=\int_0^4 |f(x)|\,dx$$

$y=x^2-5x+6$ è l'equazione di una parabola con concavità rivolta verso l'alto e che interseca l'asse x in due punti che hanno come ascisse le soluzioni di

$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-2)(x-3)=0$$
$$x=2 \vee x=3$$



$$=\int_0^4 |f(x)|\,dx$$

$$\mathcal{A}=\int_0^4 |f(x)|\,dx=$$

$|f(x)|=-f(x)$ se $2\leq x\leq 3$

linearità

$$=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^3 (-f(x))\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx=$$

$$=\int_0^2 f(x)\,dx-\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$$

Iniziamo a determinare le primitive di f

$$\int f(x)\,dx = \int (x^2-5x+6)\,dx =$$ linearità

$$= \int x^2\,dx - 5\int x\,dx + 6\int 1\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 5\cdot\frac{1}{2}x^2 + 6x + c = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + c$$

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_3^4 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{5}{2}\cdot 4 + 12 - 0\right) - \left(9 - \frac{5}{2}\cdot 9 + 18 - \left(\frac{8}{3} - 10 + 12\right)\right) +$$

$$+ \left(\frac{64}{3} - 40 + 24 - \left(9 - \frac{5}{2}\cdot 9 + 18\right)\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 2 - \left[9\left(1 - \frac{5}{2} + 2\right) - \frac{8}{3} - 2\right] + \left(\frac{64}{3} - 16 - 9\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 2 - \frac{9}{2} + \frac{8}{3} + 2 + \frac{64}{3} - 16 - \frac{9}{2} =$$

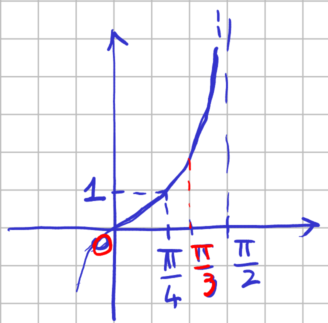
$$= \frac{80}{3} - 9 - 12 = \frac{80}{3} - 21 = \frac{17}{3}$$

Calcolare l'area del trapezoide sotteso a $f(x) = \dfrac{\sqrt{\tan x} - 1}{\cos^2 x}$ sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi/3} |f(x)|\, dx$$

Dominio di f

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan x \geq 0 \\ \cos^2 x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0 + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

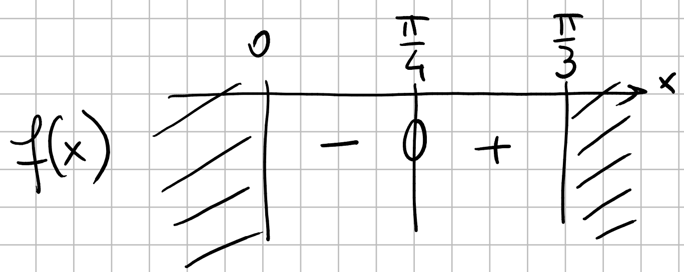
In $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ f è ben definita e continua

Risolviamo

$f(x) \geq 0$ in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\sqrt{\tan x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\tan x} \geq 1 \Rightarrow \tan x \geq 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\cos^2 x > 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$



$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi/4} (-f(x))\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} f(x)\, dx =$$

$$= -\int_0^{\pi/4} f(x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} f(x)\, dx$$

Cerchiamo le primitive di f

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}-1}{\cos^2 x}dx =$$

$$y=\varphi(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$dy=\varphi'(x)\,dx=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\left(\sqrt{y}-1\right)dy=$$

$$=\int\left(y^{1/2}-1\right)dy=$$

$y=\tan x$

$$=\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-y+c=\frac{2}{3}(\tan x)^{3/2}-\tan x+c$$

$$A=-\int_0^{\pi/4}f(x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/3}f(x)dx=$$

$$=-\left[\frac{2}{3}(\tan x)^{3/2}-\tan x\right]_0^{\pi/4}+\left[\frac{2}{3}(\tan x)^{3/2}-\tan x\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=$$

$$=-\left(\frac{2}{3}\cdot 1-1-0\right)+\left(\frac{2}{3}(\sqrt{3})^{3/2}-\sqrt{3}-\left(\frac{2}{3}-1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot 3^{3/4}-\sqrt{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt[4]{27}-\sqrt{3}$$

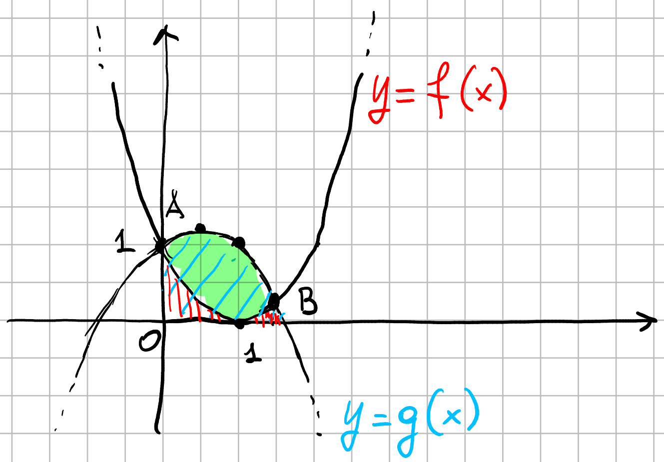
$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt[4]{3}}-\sqrt{3}$$

espressioni equivalenti

Calcolare l'area della regione di piano compresa fra i grafici di $f(x) = x^2-2x+1$ e $g(x) = -x^2+x+1$.

$f(x) = x^2-2x+1 = (x-1)^2$

Il suo grafico si ottiene dal grafico di $y=x^2$ tramite traslazione di vettore $(1,0)$ "ci si sposta a destra di un'unità"



$g(x) = -x^2+x+1$ ha come una parabola con concavità rivolta verso il basso e vertice $V(x_v, y_v)$

$a=-1$
$b=1$
$c=1$

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

$y_v = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1 = \frac{5}{4}$

I grafici delle funzioni f e g si intersecano nei punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Si può ottenere l'area cercata come differenza fra le aree dei trapezoidi sottesi alle due funzioni sull'intervallo $[x_A, x_B]$

$$\mathcal{A} = \boxed{\mathcal{A}_{T(g;\,x_A,x_B)}} - \boxed{\mathcal{A}_{T(f;\,x_A,x_B)}} = \int_{x_A}^{x_B} g(x)\,dx - \int_{x_A}^{x_B} f(x)\,dx$$

Le ascisse dei punti di intersezione tra i grafici sono le soluzioni di $f(x)=g(x)$

$$x^2-2x+\cancel{1}=-x^2+x+\cancel{1}$$

$$2x^2-3x=0$$

$$x(2x-3)=0$$

$$x_A=0,\quad x_B=\frac{3}{2}$$

linearità

$$\mathcal{A}=\int_0^{3/2} g(x)\,dx-\int_0^{3/2} f(x)\,dx = \int_0^{3/2}\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

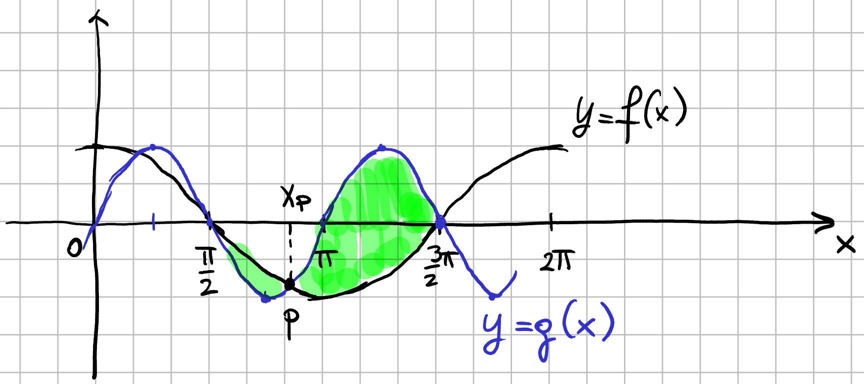
$$=\int_0^{3/2}\left(-x^2+x+1-x^2+2x-1\right)dx=$$

$$=\int_0^{3/2}\left(-2x^2+3x\right)dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_0^{3/2}=$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-0=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}=$$

$$=-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{4}\left(-1+\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{8}$$

Calcolare l'area della regione compresa fra i grafici di $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin 2x$ sull'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.



Se P è il punto di intersezione tra i grafici di f e g con ascissa in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, allora

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{per } x \in \left[\frac{\pi}{2}, x_P\right] \quad \text{e}$$

$$g(x) \geq f(x) \quad \text{per } x \in \left[x_P, \frac{3}{2}\pi\right]$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x_P} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{x_P}^{\frac{3\pi}{2}} (g(x) - f(x))\,dx$$

L'ascissa di P è la soluzione di

$$\cos x = \sin(2x) \quad \text{in } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \lor \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \lor x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \lor x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Quindi $x_P = \frac{5}{6}\pi$

Fra le soluzioni sopra, consideriamo quelle in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\cos x - \sin(2x)\right) dx + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\sin(2x) - \cos x\right) dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \cos x \, dx = \sin x + c \\ &\int \sin(2x)\, dx = \frac{-\cos(2x)}{2} + c \end{aligned}}$$

$$A = \left[\sin x + \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi} + \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) - \sin x\right]_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{2}(-1)\right)\right] + \left[-\frac{1}{2}\cdot(-1) - (-1) - \left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Attenzione! Nell'intervallo considerato occorre determinare per quali x si ha $f(x) \geq g(x)$ e per quali x si ha $f(x) \leq g(x)$.

Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{3\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$$\int_0^{1/2} \frac{3\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_0^{1/2} 3\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx =$$

$$= 3\int_0^{1/2} \underbrace{\arcsin x}_{g(x)} \cdot \underbrace{(x+1)^{-1/2}}_{f'(x)}\,dx =$$

$f(x) = \dfrac{(x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$ $\qquad f'(x) = (x+1)^{-1/2}$

$g(x) = \arcsin x$ $\qquad g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= 3\Big[\underbrace{2\sqrt{x+1}}_{f(x)}\ \underbrace{\arcsin x}_{g(x)}\Big]_0^{\frac{1}{2}} - 3\int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{g'(x)} \cdot \overbrace{2\sqrt{x+1}}^{f(x)}\,dx =$$

$$= 3\left[2\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi}{6} - 0\right] - 3\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cancel{\sqrt{x+1}}}{\cancel{\sqrt{1+x}}\,\sqrt{1-x}}\,dx =$$

$$= 6\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi}{6} - 6\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \pi\sqrt{\frac{3}{2}} - 6\Big[-2(1-x)^{1/2}\Big]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \pi\sqrt{\frac{3}{2}} + 12\Big[(1-x)^{1/2}\Big]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \pi\sqrt{\frac{3}{2}} + 12\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right] = \pi\sqrt{\frac{3}{2}} + 6\sqrt{2} - 12$$

Area della regione compresa fra i grafici di

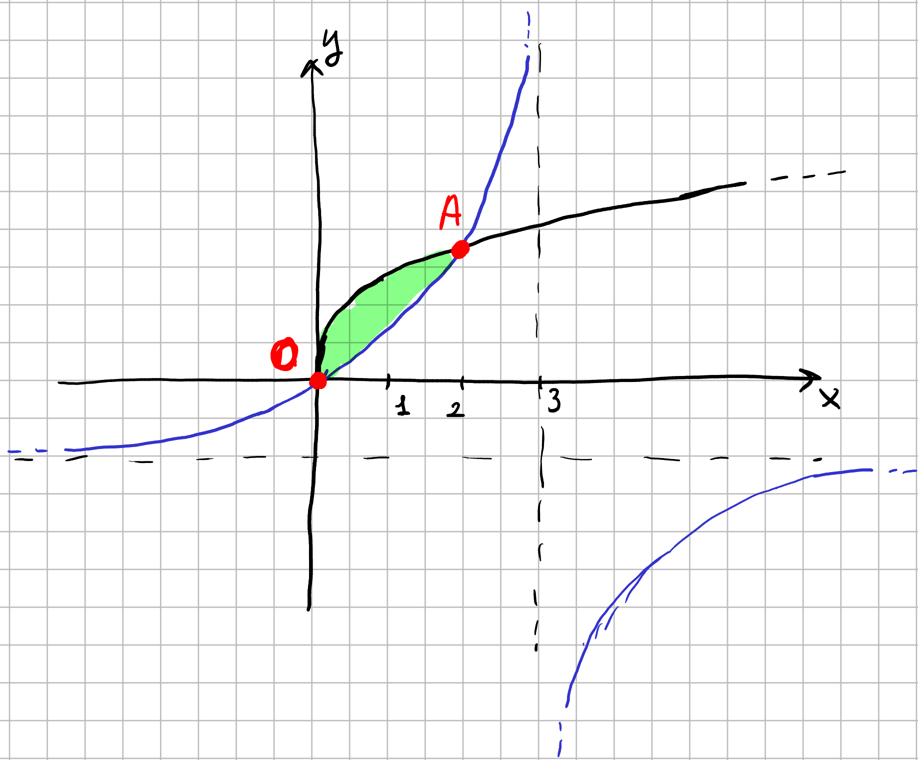
$f(x)=\sqrt{2x}$ e $g(x)=\dfrac{x}{3-x}$

Una funzione $\tilde{g}(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ha come grafico un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti se $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$ e $ad-bc\neq 0$.

Il grafico si ottiene da quello di $y=\dfrac{1}{x}$ o di $y=-\dfrac{1}{x}$ tramite traslazioni e dilatazioni.

$\operatorname{dom}(\tilde{g})=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ $\quad x=-\dfrac{d}{c}$ asintoto verticale

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\tilde{g}(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax}{cx}=\dfrac{a}{c}$ $\quad y=\dfrac{a}{c}$ asintoto orizzontale



$f(x)=\sqrt{2x}$

$g(x)=\dfrac{x}{3-x}$

$y=-1$ as. orizz.

$x=3$ as. verticale

$g(0)=0$

$$A=\int_0^{x_A}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

Le ascisse dei punti di intersezioni fra i grafici sono le soluzioni di

$$\sqrt{2x} = \frac{x}{3-x}$$

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ \dfrac{x}{3-x} \geq 0 \\ 2x = \left(\dfrac{x}{3-x}\right)^2 \end{cases}$$

$$\frac{x}{3-x} \geq 0 \iff 0 \leq x < 3$$

$$2x(3-x)^2 = x^2$$

$$2x(3-x)^2 - x^2 = 0$$

$$x\left[2(9-6x+x^2) - x\right] = 0$$

$$x\left(2x^2 - 13x + 18\right) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - 13x + 18 = 0 \qquad \Delta = 169 - 144 = 5^2$$

$$x = \frac{13 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{\cancel{18}^{\,9}}{\cancel{4}_{\,2}} \quad \vee \quad x = \frac{\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{4}_{\,1}}$$

$$x = 0 \quad \vee \quad \underbrace{x = \frac{9}{2}} \quad \vee \quad x = 2$$

Ascisse di O(0,0)

Non accettabile: non appartiene a [0,3)

Ascisse di A

$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x}{3-x}\right) dx$$

$$\int \sqrt{2x}\,dx = \sqrt{2}\int x^{1/2}\,dx = \sqrt{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} + c$$

$$\int \frac{x}{3-x}\,dx = -\int \frac{-x}{3-x}\,dx = -\int \frac{(3-x)-3}{3-x}\,dx =$$

$$= -\int\left(1 - \frac{3}{3-x}\right)dx = -\int 1\,dx - \int \frac{-3}{3-x}\,dx =$$

$$= -x - 3\int \frac{-1}{3-x}\,dx = -x - 3\log|3-x| + c$$

$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x}{3-x}\right)dx = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot x^{3/2} + x + 3\log|3-x|\right]_0^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 2^{1/2}\cdot 2^{3/2} + 2 + 3\overbrace{\log 1}^{=0} - 0 - 0 - 3\log 3 =$$

$$= \frac{8}{3} + 2 - 3\log 3 = \frac{14}{3} - 3\log 3$$