Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 5 dicembre 2024

1. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + xe^x - 1 + \sqrt[3]{x^2}}{3x}\, dx$.
2. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int e^x(e^x - 2)^3\, dx$.
3. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4 + x^3}}\, dx$.
4. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \sin(2x)\, dx$.
5. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x - 10}{x^2 - 4}\, dx$.
6. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 4}{x^3 + 2x}\, dx$.
7. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{x^3 + 4x^2}\, dx$.
8. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}\, dx$.
9. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 9x + 11}{x^2 - 5x + 6}\, dx$.
10. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{4e^{2x} + 4e^x + 1}\, dx$.
11. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int (x + 3)e^{5-x}\, dx$.
12. (Prova d'esame 4 settembre 2024) Determinare la primitiva $G\colon (-5, +\infty) \to \mathbb{R}$ della funzione

$$g(x) = \frac{\log(x + 5)}{(x + 5)^2}$$

tale che $G(-4) = 4$.

$$\int \frac{\sqrt{x} + xe^x - 1 + \sqrt[3]{x^2}}{x}\,dx = $$ linearità

$$= \int \frac{x^{1/2}}{x}\,dx + \int \frac{xe^x}{x}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x^{2/3}}{x}\,dx =$$

$$= \int x^{-1/2}\,dx + \int e^x\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{-1/3}\,dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + e^x - \log|x| + \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c =$$

$$= 2\sqrt{x} + e^x - \log|x| + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\int e^x (e^x-2)^3\,dx$$

- Prima alternativa: integrazione per sostituzione

$$y = e^x - 2$$

$$dy = e^x dx$$

$$\int \overbrace{e^x (e^x-2)^3\,dx}^{dy} =$$

$$= \int y^3\,dy = \frac{1}{4} y^4 + c = \frac{1}{4}(e^x-2)^4 + c$$

- Seconda alternativa: pensare alle regole di derivazione

$$\frac{d}{dx}\left[(\varphi(x))^\alpha\right] = \alpha \cdot \varphi(x)^{\alpha-1} \cdot \varphi'(x)$$

$$\int \underbrace{e^x}_{\varphi'(x)} (\underbrace{e^x-2}_{\varphi(x)})^3\,dx = \frac{1}{4}(e^x-2)^4 + c$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}}\,dx$$

Cerchiamo tutte le primitive di $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}}$ in un intervallo contenuto in $\{x \in \mathbb{R} : 4+x^3>0\} = (-\sqrt[3]{4}, +\infty)$

Integrazione per sostituzione

$y = 4+x^3 \qquad dy = 3x^2 dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\overbrace{3x^2\,dx}^{=dy}}{\sqrt{4+x^3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{3}\int y^{-1/2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{y} + c = \frac{2}{3}\sqrt{4+x^3} + c$$

$$\int \sin(2x)\,dx$$

- Prima alternativa: pensare alle regole di derivazione

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(\varphi(x))\right) = -\sin(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

$$\int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int \left(-\underbrace{2}_{\varphi'(x)}\sin(\underbrace{2x}_{\varphi(x)})\right)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$$

- Seconda alternativa: integrazione per sostituzione
  - Prima sostituzione possibile: $y = 2x$, $dy = 2dx$

$$\int \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2\sin(2x)\,dx}_{dy} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(y)\,dy = \frac{1}{2}(-\cos y) + c = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$$

  - Seconda sostituzione possibile

$$y = \sin x$$
$$dy = \cos x\,dx$$

$$\int \sin(2x)\,dx = \int 2\sin x \cdot \underbrace{\cos x\,dx}_{=dy} =$$

$$= \int 2y\,dy = y^2 + c = \sin^2(x) + c$$

INTEGRAZIONI DELLE FUNZIONI RAZIONALI

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$ con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi a coefficienti reali

Indichiamo con n il grado di $P(x)$ e con m il grado di $Q(x)$; supponiamo anche $n \geq 0$ (altrimenti la funzione è costantemente nulla)

- **Caso $n < m$**

$Q(x)$ si può scrivere come prodotto di fattori di 1° grado e di fattori di 2° grado con $\Delta < 0$, eventualmente ripetuti

Si può riscrivere $f(x)$ come somma di <u>fratti semplici</u>, cioè frazioni che hanno al denominatore uno dei fattori di 1° grado o di 2° grado della scomposizione, o loro potenze, e hanno come numeratore un numero reale se si usa al den. un fattore di 1° grado oppure un polinomio di 1° grado se si usa al den. un fattore di 2° grado.

$$\int \frac{x-10}{x^2-4}\,dx$$

Con le notazioni sopra, $n = 1$, $m = 2$

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

Si possono trovare $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x-10}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$$

$$x-10 = A(x-2)+B(x+2)$$

$$1\cdot x-10 = x(A+B)-2A+2B$$

L'uguaglianza vale per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$ se e solo se i coefficienti dei termini con lo stesso grado coincidono

$$\begin{cases} 1 = A+B \\ -10 = -2A+2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B = 1 \\ A-B = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

sommando le due equazioni →

I eq. − II eq. →

$$\begin{cases} 2A = 6 \\ 2B = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -2 \end{cases}$$

linearità

$$\int \frac{x-10}{x^2-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-2}\right)dx =$$

$$= 3\int \frac{1}{x+2}\,dx - 2\int \frac{1}{x-2}\,dx =$$

$$= 3\log|x+2| - 2\log|x-2| + c$$

$$\int \frac{3x^2-4}{x^3+2x}\,dx$$ $n=2,\ m=3$

$$x^3+2x = x(x^2+2)$$

x: fattore di 1° grado

(x^2+2): fattore di 2° grado con $\Delta<0$, quindi irriducibile su $\mathbb{R}$

Si possono trovare $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{3x^2-4}{x^3+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$ per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$Bx+C$: polinomio di 1° grado

$$3x^2-4 = A(x^2+2) + (Bx+C)x$$

$$3x^2-4 = Ax^2+2A+Bx^2+Cx$$

$$0x+3x^2-4 = x^2(A+B)+Cx+2A$$

$$\begin{cases} 3 = A+B \\ 0 = C \\ -4 = 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=5 \\ C=0 \\ A=-2 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x^2-4}{x^3+2x}\,dx = \int\left(-\frac{2}{x}+\frac{5x}{x^2+2}\right)dx =$$

$$= -2\int\frac{1}{x}\,dx + 5\underbrace{\int\frac{x}{x^2+2}\,dx}_{=I_2} = I$$

$$I_2 = \int \frac{x}{x^2+2}\,dx =$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \log|\varphi(x)| + c$$

è la derivata del denominatore

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+2| + c = \frac{1}{2}\log(x^2+2) + c$$

$x^2+2>0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

Alternative per sostituzione

$$I_2 = \int \frac{x}{x^2+2}\,dx =$$

$y = x^2+2$

$dy = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\underbrace{2x\,dx}_{=dy}}{x^2+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}\log|y| + c = \frac{1}{2}\log(x^2+2) + c$$

$$I = -2\log|x| + 5\cdot\frac{1}{2}\log(x^2+2) + c$$

$$\int \frac{2x+1}{x^3+4x^2}\,dx \qquad n=1,\ m=3$$

$$x^3+4x^2 = x^2(x+4)$$

Cerchiamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2x+1}{x^3+4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$$

$$2x+1 = Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2$$

$$2x+1 = Ax^2 + 4Ax + Bx + 4B + Cx^2$$

$$0x^2 + 2x + 1 = (A+C)x^2 + (4A+B)x + 4B$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 4A+B=2 \\ 4B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A \\ 4A=\frac{7}{4} \\ B=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-\frac{7}{16} \\ A=\frac{7}{16} \\ B=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^3+4x^2}\,dx = \int \left(\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{7}{16}\cdot\frac{1}{x+4} \right) dx =$$

$$= \frac{7}{16}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2}\,dx - \frac{7}{16}\int \frac{1}{x+4}\,dx =$$

$$= \frac{7}{16}\log|x| + \frac{1}{4}\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{7}{16}\log|x+4| + c = \qquad \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2}$$

$$= \frac{7}{16}\log|x| - \frac{1}{4x} - \frac{7}{16}\log|x+4| + c$$

- Caso $n = m$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+1}\,dx \qquad n = m = 2$$

- Prima alternativa: scrivere il numeratore come somma tra il denominatore e un altro addendo

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)+3x+1}{x^2+1}\,dx =$$

grado minore del denominatore

$$= \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{3x+1}{x^2+1} \right) dx = \int \left(1 + \frac{3x+1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int 1\,dx + \frac{3}{2} \int \frac{\boxed{2 \cdot x}}{\boxed{x^2+1}}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$= \varphi'(x)$, $= \varphi(x)$

$$= x + \frac{3}{2} \log(x^2+1) + \arctan(x) + c$$

- Seconda alternativa: calcolare quoziente e resto della divisione (numeratore) : (denominatore)

dividendo → divisore

$$\begin{array}{rr|l} x^2+3x+2 & & x^2+1 \\ \hline -x^2 \qquad -1 & & 1 \\ \hline 3x+1 & & \end{array}$$

← quoziente

resto

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisore}} = \text{quoziente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisore}}$$

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+1} = 1 + \frac{3x+1}{x^2+1}$$

• Caso $n > m$

$$I = \int \frac{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 9x + 11}{x^2 - 5x + 6}\, dx \qquad n = 4,\ m = 2$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -5x^3 & +8x^2 & -9x & +11 & x^2 - 5x + 6 \\
\hline
-x^4 & +5x^3 & -6x^2 & & & x^2 + 2 \\
\hline
 & & 2x^2 & -9x & +11 & \\
 & & -2x^2 & +10x & -12 & \\
\hline
 & & & x & -1 &
\end{array}
$$

← quoziente

resto

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 9x + 11}{x^2 - 5x + 6} = x^2 + 2 + \boxed{\frac{x-1}{x^2 - 5x + 6}}$$

grado minore del grado di $x^2 - 5x + 6$

Le primitive si trovano decomponendo in fratti semplici

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$$

$$x - 1 = A(x-3) + B(x-2)$$

$$x - 1 = x(A+B) - 3A - 2B$$

II eq. -2(I eq)

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ -1 = -3A - 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(A+B) = 1 \cdot 2 \\ 3A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$I = \int \left(x^2 + 2 + \frac{x-1}{x^2-5x+6} \right) dx =$$

$$= \int \left(x^2 + 2 - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3} \right) dx =$$

$$= \int x^2 dx + \int 2\, dx - \int \frac{1}{x-2} dx + 2 \int \frac{1}{x-3} dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 + 2x - \log|x-2| + 2 \cdot \log|x-3| + c$$

$$I=\int \frac{e^{2x}}{4e^{2x}+4e^{x}+1}\,dx =$$

$y=e^x$
$dy=e^x dx$

$$= \int \frac{e^x \cdot e^x \, dx}{4e^{2x}+4e^x+1} =$$

$= dy$

$$= \int \frac{y}{4y^2+4y+1}\,dy$$

La funzione integranda in y è razionale e ha numeratore con grado minore del denominatore.

$$4y^2+4y+1=(2y+1)^2$$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{y}{4y^2+4y+1} = \frac{A}{2y+1} + \frac{B}{(2y+1)^2} \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$y = A(2y+1)+B$$

$$y = 2Ay + A + B$$

$$\begin{cases} 1 = 2A \\ 0 = A+B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{y}{(2y+1)^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2y+1}\,dy - \frac{1}{2}\int (2y+1)^{-2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{\overset{=\varphi'(x)}{2}}{\underbrace{\boxed{2y+1}}_{=\varphi(x)}} dy - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \underbrace{\boxed{2}}_{\varphi'(x)} \Big(\underbrace{\boxed{2y+1}}_{\varphi(x)} \Big)^{-2} dy =$$

$$= \frac{1}{4} \log |2y+1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{(2y+1)^{-2+1}}{-2+1} + c =$$

$$= \frac{1}{4} \log |2y+1| + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2y+1} + c =$$

$\log |2e^x+1| = \log (2e^x+1)$ perché $2e^x+1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{1}{4} \log (2e^x+1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2e^x+1} + c$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int \underbrace{(x+3)}_{g(x)}\underbrace{e^{5-x}}_{f'(x)}\,dx =$$

$f(x) = -e^{5-x}$ $\qquad f'(x) = e^{5-x}$

$g(x) = x+3$ $\qquad g'(x) = 1$

$$= -e^{5-x}(x+3) - \int (-e^{5-x})\cdot 1\,dx =$$

$$= -e^{5-x}(x+3) - e^{5-x} + c =$$

$$= -e^{5-x}(x+4) + c$$

(04/09/2024) Determinare la primitiva $G:(-5,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ della funzione

$$g(x)=\frac{\log(x+5)}{(x+5)^2}$$ tale che $G(-4)=4$.

Determiniamo l'insieme delle primitive di g in $(-5,+\infty)$

$$\int\frac{\log(x+5)}{(x+5)^2}\,dx=$$

$$=\int\underbrace{(x+5)^{-2}}_{f'(x)}\underbrace{\log(x+5)}_{g(x)}\,dx=$$

$f'(x)=(x+5)^{-2}$ $\quad f(x)=\dfrac{(x+5)^{-2+1}}{-2+1}$

$g(x)=\log(x+5)$ $\quad g'(x)=\dfrac{1}{x+5}$

$$=-(x+5)^{-1}\log(x+5)-\int\left[-(x+5)^{-1}\cdot\frac{1}{x+5}\right]dx=$$

$$=-\frac{\log(x+5)}{x+5}-\int\left[-(x+5)^{-2}\right]dx=$$

$$=-\frac{\log(x+5)}{x+5}-(x+5)^{-1}+c=$$

$$=-\frac{\log(x+5)+1}{x+5}+c$$

Fra tutte le primitive, troviamo quella che assume valore 4 per $x=-4$

$$-\frac{\log(-4+5)+1}{-4+5}+c=4$$

$$-\frac{\log(1)+1}{1}+c=4$$

$$-1+c=4$$

$$c=5$$

Quindi la primitiva cercata è

$$G(x)=-\frac{1+\log(x+5)}{x+5}+5$$