Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 28 novembre 2024

1. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\sqrt[3]{n}\left[e^{\frac{1}{n+1}} - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - 1\right]$.

2. (Prova d'esame 4 settembre 2024) Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}$.

3. (Prova d'esame 10 aprile 2017) Discutere per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)}$$
converge assolutamente. Discutere la convergenza nel caso $\alpha = 8$.

4. (Prova d'esame 11 gennaio 2012) Discutere il carattere della serie numerica
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \left[\frac{n}{2}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right]^n.$$

5. (Prova d'esame 29 marzo 2021) Sia $\alpha \in (0, +\infty)$. Discutere la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n + \arctan(n!)}{e^{2n} - 1}$$
al variare di α.

6. (Prova d'esame 13 gennaio 2020) Determinare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n[\log((2n)! + 7) - \log((2n)!)].$$

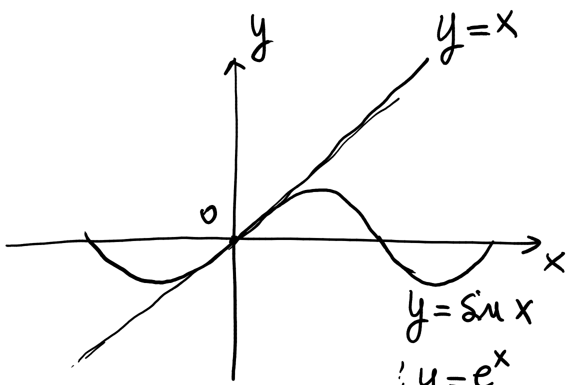
7. (Prova d'esame 20 gennaio 2021) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere il carattere della serie a termini positivi
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha}{\log(n+1) - \log n}.$$

8. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + \sqrt{\log(n+2)}}{n^3\sqrt{\log(n+2)}}$.

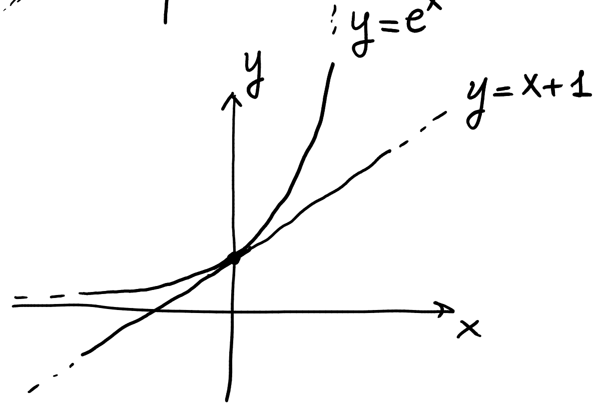
Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{n\sqrt[3]{n}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - 1\right)}_{=a_n}$$

$$n\sqrt[3]{n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



$$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$$



$$e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x - 1 \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

. La serie è a termini positivi

$$e^{\frac{1}{n+1}} - 1 - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1} - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0$$

$$\sin t = t + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0$$

$$e^{\frac{1}{n+1}} - 1 - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{n+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{1}$$

$$- \cancel{\frac{1}{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$a_n \sim n \cdot n^{1/3} \cdot \frac{1}{2(n+1)^2} \sim n^{4/3} \cdot \frac{1}{2n^2}$$

$(n+1)^2 \sim n^2$ per $n \to +\infty$

$$a_n \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2-4/3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2/3}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ diverge positivamente (serie armonica generalizzata con $\lambda = \frac{2}{3}$)

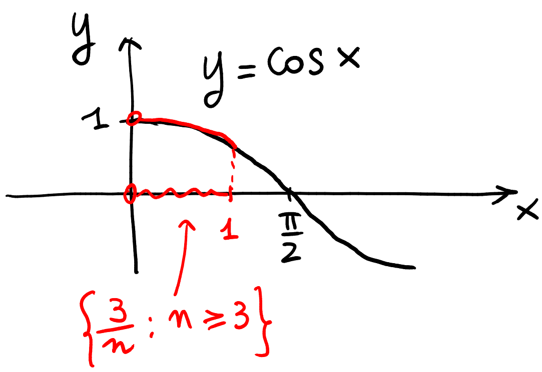
Per il criterio del confronto asintotico, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente.

(04/09/2024) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \underbrace{\sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}}_{=b_n}$$

Serie a segni alterni

- $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ per definizione di radice quadrata
- $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1-\underbrace{\cos\left(\frac{3}{n}\right)}_{\to 1}} = 0$
- b_n è monotona decrescente, cioè $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \geq 3$



$$\frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{n} \qquad \forall\, n \geq 3$$

$$\cos\left(\frac{3}{n+1}\right) \geq \cos\left(\frac{3}{n}\right)$$ perché $y = \cos x$ è strettamente decrescente per $x \in (0,1]$

$$1 - \cos\left(\frac{3}{n+1}\right) \leq -\cos\left(\frac{3}{n}\right) + 1$$

$$\sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n+1}\right)} \leq \sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}$$ perché $y = \sqrt{x}$ è strettamente crescente in $[0,+\infty)$

$$b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \geq 3$$

Sono verificate le ipotesi del criterio di Leibniz

Dunque la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n b_n$ converge.

Aggiunta all'esercizio: determinare se la serie converge assolutamente, cioè se sia convergente la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \left| (-1)^n \sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)} \right| = \sum_{n=3}^{+\infty} \sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}$

$$\sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)} = \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2}$$

$$1-\cos\left(\frac{3}{n}\right) \sim \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{n^2} \qquad \text{per } n\to+\infty$$

$$\left(1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)\right)^{1/2} \sim \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n} \qquad \text{per } n\to+\infty$$

$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente (serie armonica)

Per il criterio del confronto asintotico,

$\sum_{n=3}^{+\infty} \sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}$ diverge positivamente.

Dunque $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}$ converge semplicemente.

(10/04/2017) Discutere per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge assolutamente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)}$.

Discutere la convergenza nel caso $\alpha = 8$.

Poniamo $a_n = \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)}$ $\forall n \geq 1$

- Convergenza assoluta: studiamo il carattere di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)} \right|$$

$1+7^n \geq 8$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, quindi $\log(1+7^n) > 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|7-\alpha|^n}{\log(1+7^n)}$$

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|7-\alpha|^{n+1}}{\log(1+7^{n+1})} \cdot \frac{\log(1+7^n)}{|7-\alpha|^n} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} |7-\alpha| \cdot \frac{\log(1+7^n)}{\log(1+7^{n+1})} =$$

$1+7^n \sim 7^n$ per $n \to +\infty$

$1+7^{n+1} \sim 7^{n+1}$ per $n \to +\infty$

$$= \lim_{n \to +\infty} |7-\alpha| \cdot \frac{\log(7^n)}{\log(7^{n+1})} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} |7-\alpha| \cdot \frac{n \cancel{\log 7}}{(n+1) \cancel{\log 7}} = |7-\alpha|$$

$$\frac{n}{n+1} \to 1$$

Se $|7-\alpha| > 1$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge

Se $|7-\alpha| < 1$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge

Se $|7-\alpha| = 1$, allora non si può concludere nulla dal criterio del rapporto; questo caso va studiato separamente

$$|7-\alpha| < 1 \iff -1 < 7-\alpha < 1 \iff -8 < -\alpha < -6$$

$$\iff 6 < \alpha < 8$$

Dunque se $\alpha \in (6,8)$, allora la serie di partenza converge assolutamente

- Studiamo i casi in cui non c'è convergenza assoluta.

Se $\alpha < 6$, allora la serie di partenza è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)}, \quad \text{con } 7-\alpha > 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{n\log 7} = +\infty$$

per confronto di infiniti

$+\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)}$$ è a termini positivi, quindi diverge se $\alpha < 6$

- Se $\alpha > 8$, la serie di partenza è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\alpha-7)^n}{\log(1+7^n)}, \quad \text{con } \alpha-7>1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\alpha-7)^n}{\log(1+7^n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\alpha-7)^n}{n\cdot\log 7} = +\infty$$

$+\infty$

$$\frac{(-1)^n(\alpha-7)^n}{\log(1+7^n)}$$ non ha limite

Dunque la serie di partenza non converge se $\alpha > 8$

- Caso $\alpha = 6$: studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-6)^n}{\log(1+7^n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(1+7^n)}$$

È una serie a termini positivi

$$\frac{1}{\log(1+7^n)} \sim \frac{1}{n \cdot \log(7)} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivi, quindi diverge $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(1+7^n)}$

per il criterio del confronto asintotico

- Caso $\alpha = 8$: studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-8)^n}{\log(1+7^n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{\log(1+7^n)}}_{= b_n}$$

Questa serie non converge assolutamente, perchè $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\log(1+7^n)} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(1+7^n)}$ diverge (vedi sopra)

Vediamo se sono verificate le ipotesi del criterio di Leibniz

- $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (visto all'inizio)
- $\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\log(1+7^n)}_{\to +\infty}} = 0$
- b_n è monotona decrescente

$$7^n \leq 7^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$
($y = 7^x$ è strett. crescente in $\mathbb{R}$)

$$1+7^n \leq 1+7^{n+1}$$
$$\log(1+7^n) \leq \log(1+7^{n+1})$$
($y = \log x$ è strett. crescente in $(0,+\infty)$)

$$\frac{1}{\log(1+7^n)} \geq \frac{1}{\log(1+7^{n+1})}$$

($y = \frac{1}{x}$ è strett. decrescente in $(0,+\infty)$)

$$b_n \geq b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$$

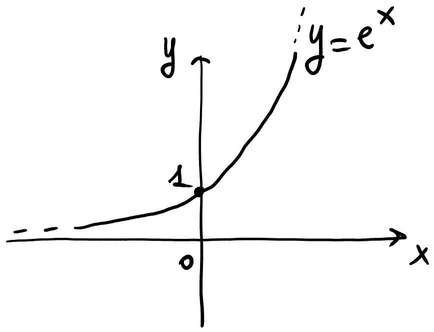
Per il criterio di Leibniz, converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+7^n)}$$

- Se $\alpha \in (6,8)$, la serie di partenza converge assolutamente.
- Se $\alpha = 8$, allora la serie di partenza converge semplicemente.

(11/01/2012) Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\left[\frac{n}{2}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]^n = a_n$$



$e^x \geq 1 \quad \forall\, x \geq 0$

quindi $e^{\frac{1}{n}} - 1 \geq 0 \quad \forall\, n \geq 1$

La serie è a termini positivi

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\left[\frac{n}{2}\left(e^{1/n}-1\right)\right]^n\right\}^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n}{2}\left(e^{1/n}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{\cancel{n}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} =$$

$e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2e} < 1$$

Dato che $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ esiste ed è minore di 1, il criterio della radice permette di concludere che $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(29/03/2021) Discutere, al variare di $\alpha \in (0,+\infty)$, la convergenza di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\alpha^n + \arctan(n!)}{e^{2n}-1}}_{=a_n}$

$$a_n = \underbrace{\frac{\alpha^n}{e^{2n}-1}}_{= b_n} + \underbrace{\frac{\arctan(n!)}{e^{2n}-1}}_{= c_n}$$

$b_n \geq 0$ e $c_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$

Per linearità, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$

$$c_n = \frac{\arctan(n!)}{e^{2n}-1} \sim \frac{\pi/2}{e^{2n}} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$ è una serie geometrica con ragione $q = \frac{1}{e^2}$. Dato che $0 < q < 1$, la serie converge.

Per il criterio del confronto asintotico, converge anche $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n!)}{e^{2n}-1}$ $\forall \alpha \in (0,+\infty)$

$$b_n = \frac{\alpha^n}{e^{2n}-1} \sim \frac{\alpha^n}{e^{2n}} = \left(\frac{\alpha}{e^2}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{e^2}\right)^n$$ è una serie geometrica con ragione $q=\frac{\alpha}{e^2}$

$$\frac{\alpha}{e^2}\geq 1 \iff \alpha\geq e^2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{e^2}\right)^n$$ converge se $\alpha\in(0,e^2)$ e diverge positivamente se $\alpha\in[e^2,+\infty)$.

Dato che $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$,

convergente $\forall\alpha\in(0,+\infty)$

la serie data converge se $0<\alpha<e^2$ e diverge positivamente se $\alpha\geq e^2$.

(13/01/2020) Determinare il carattere di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n\left[\log\left((2n)!+7\right)-\log\left((2n)!\right)\right] = a_n$$

$\log((2n)!+7) > \log((2n)!)$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ perché $y=\log x$ è strettamente crescente in $(0,+\infty)$.

La serie è a termini positivi.

$$a_n = n^n \cdot \log\left(\frac{(2n)!+7}{(2n)!}\right) =$$

$$= n^n \cdot \log\left(1+\frac{7}{(2n)!}\right)$$

$\frac{7}{(2n)!} \to 0$ $\qquad \log(1+x)\sim x$ per $x\to 0$

$$\sim \frac{n^n \cdot 7}{(2n)!}$$

Studiamo il comportamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ $\qquad \frac{n^n}{(2n)!} = b_n$

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{\cancel{n+1}}{2\cancel{(n+1)}\cdot(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \cdot \underbrace{\frac{1}{2(2n+1)}}_{\to 0} = 0$$

Per il criterio del rapporto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ converge, perchè $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$.

Dato che $a_n \sim 7\, b_n$ per $n \to +\infty$, quindi la serie di partenza $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge per il criterio del confronto asintotico.

(20/01/2021) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere il carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{\left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}}{\log(n+1) - \log(n)}}_{= a_n}$$

- Denominatore di a_n

$$\log(n+1) - \log(n) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

per $n \to +\infty$

- Numeratore di a_n

$$e^{-\frac{1}{2n^2}} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{8n^4} - \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{24}_{\,12}} \cdot \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha} \sim \left(\frac{1}{12n^4}\right)^{\alpha} = 12^{-\alpha} \cdot \frac{1}{n^{4\alpha}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$a_n \sim \frac{12^{-\alpha} \cdot \frac{1}{n^{4\alpha}}}{\frac{1}{n}} = 12^{-\alpha} \cdot \frac{1}{n^{4\alpha}} \cdot n = 12^{-\alpha} \cdot \frac{1}{n^{4\alpha-1}}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4\alpha-1}}$ è una serie armonica generalizzata

$$4\alpha - 1 > 1 \iff 4\alpha > 2 \iff \alpha > \frac{1}{2}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4\alpha-1}}$ converge se $\alpha > \frac{1}{2}$, diverge altrimenti.

Per il criterio del confronto asintotico, la serie di partenza converge se $\alpha > \frac{1}{2}$ e diverge se $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \boxed{\frac{n^2+\sqrt{\log(n+2)}}{n^3\cdot\sqrt{\log(n+2)}}} = a_n$$

È una serie a termini positivi

$n+2 \geq 3$ se $n \geq 1$

$\log(n+2) \geq \log 3 > 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$n^2+\sqrt{\log(n+2)} \sim n^2$ per $n \to +\infty$ (confronto di infiniti)

$n^3\sqrt{\log(n+2)} \sim n^3(\log(n))^{1/2}$ per $n \to +\infty$

$$a_n \sim \frac{n^2}{n^3(\log(n))^{1/2}} = \frac{1}{n(\log(n))^{1/2}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^1(\log(n))^{1/2}}$ è della forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(\log(n))^\beta}$,

dove $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$, quindi diverge positivamente.

Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie di partenza diverge positivamente.