

## Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 14 novembre 2024

In ciascuno dei seguenti esercizi è data una funzione  $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Determinare il dominio di  $f$  ed eventuali simmetrie.
2. Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per  $f$ .
3. Calcolare la funzione derivata prima di  $f$  e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.
4. Studiare la crescita e decrescenza di  $f$  sul suo dominio, calcolando, qualora esistano, punti stazionari, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per  $f$ .
5. Calcolare la funzione derivata seconda di  $f$ . Studiare la concavità e convessità di  $f$  sul suo dominio, calcolando, qualora esistano, punti di flesso.
6. Tracciare un grafico qualitativo della funzione  $f$ , in accordo con i risultati ottenuti.

(a)  $f(x) = \sqrt{|x^2 + 5x|}$

(Conclusione dello studio iniziato nell'esercitazione del 7 novembre, fino allo studio della crescita e decrescenza di  $f$ )

(b)  $f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2x$

(Studio fino alla derivata seconda)

(c)  $f(x) = x^2 e^x - 1$

(Studio fino alla derivata seconda)

(d) (Prova d'esame 14 novembre 2019)

$$f(x) = \frac{1}{7} \log |x^2 e^x - 1|$$

(Fino allo studio della crescita e decrescenza di  $f$ )

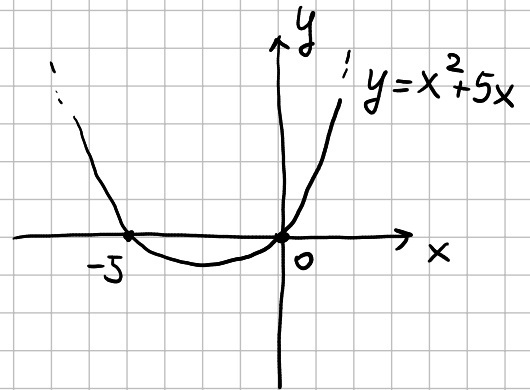
Studiare (fino alla derivata prima) la funzione  $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \sqrt{|x^2 + 5x|}$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$y = x + \frac{5}{2} \text{ as. obliquo destro}$$

$$y = -x - \frac{5}{2} \text{ as. obliquo sinistro}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{|x^2+5x|}} \cdot \frac{|x^2+5x|}{x^2+5x} \cdot (2x+5) = \\ &= \frac{\sqrt{|x^2+5x|}}{2} \cdot \frac{2x+5}{x^2+5x} \end{aligned}$$



$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x}} & \text{se } x < -5 \vee x > 0 \\ \frac{-(2x+5)}{2\sqrt{-x^2-5x}} & \text{se } -5 < x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+5}{2\sqrt{x(x+5)}} = +\infty$$

Quindi  $f'_+(0) = +\infty$  per il teorema del limite della derivata

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(2x+5)}{2\sqrt{-x(x+5)}} = -\infty$$

-5  
0<sup>+</sup> 5

Quindi  $f'_-(0) = -\infty$

$x=0$  è una cuspidale

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{-(2x+5)}{2\sqrt{-x(x+5)}} = +\infty$$

-5 5  
5 0<sup>+</sup>

Quindi  $f'_+(-5) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{2x+5}{2\sqrt{x(x+5)}} = -\infty$$

-5  
-5 0<sup>-</sup> 0<sup>+</sup>

Quindi  $f'_-(-5) = -\infty$

$x = -5$  è una cuspidale

$\text{dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, -5\}$

$x=0$  e  $x=-5$   
punti di non derivabilità

$$f'(x) = \frac{\sqrt{|x^2+5x|}}{2} \cdot \frac{2x+5}{x^2+5x}$$

Punti stazionari  $f'(x) = 0$

$$\frac{\sqrt{|x^2+5x|}}{2} \cdot \frac{2x+5}{x^2+5x} = 0$$

$$2x+5=0$$

$$x = -\frac{5}{2} \text{ punto stazionario}$$

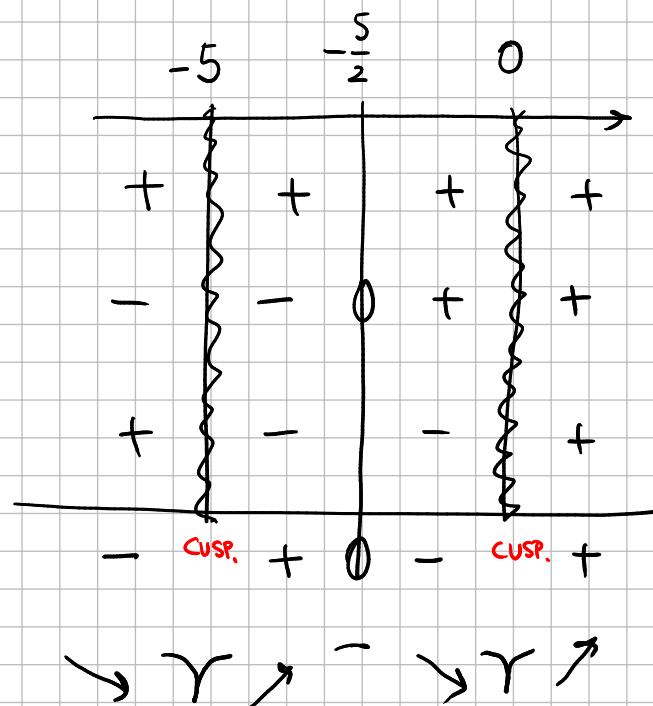
Studiamo il segno di  $f'(x)$

$$\sqrt{|x^2+5x|} > 0 \quad \forall x \in \text{dom}(f')$$

$$2x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$$

$$x^2+5x > 0 \Leftrightarrow x < -5 \vee x > 0$$

$$\begin{array}{c} f'(x) \\ f(x) \end{array}$$



$f$  è strettamente decrescente in  $(-\infty, -5)$  e in  $(-\frac{5}{2}, 0)$

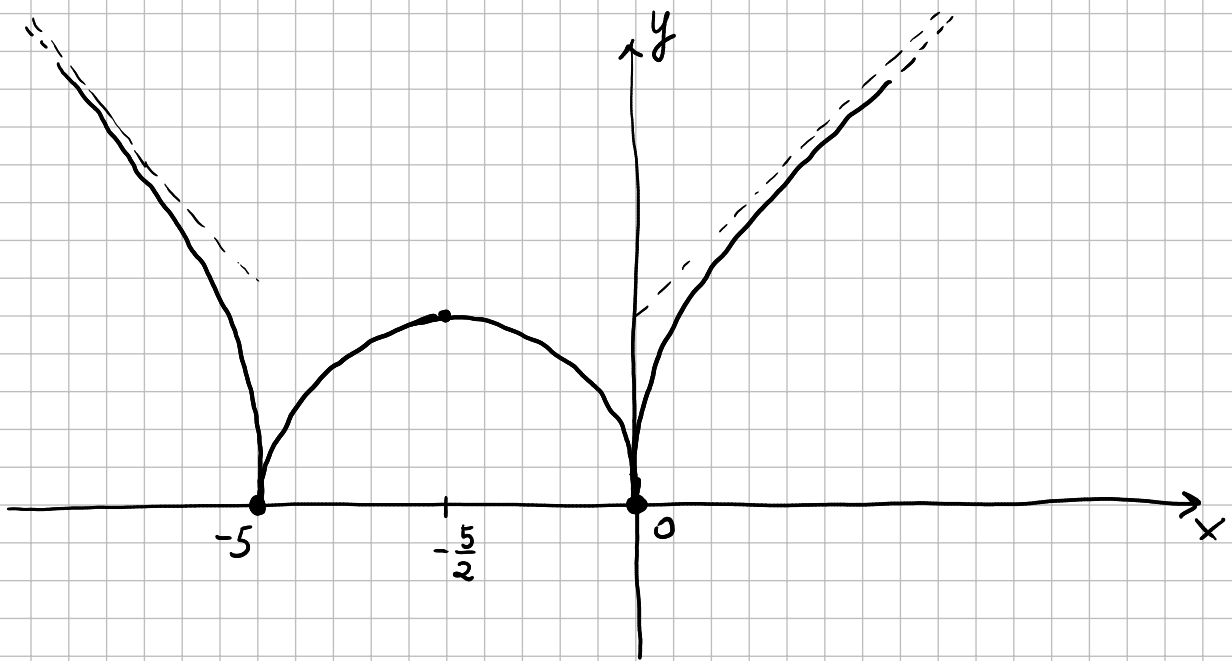
$f$  è strettamente crescente in  $(-5, -\frac{5}{2})$  e in  $(0, +\infty)$

$x = -\frac{5}{2}$  è punto di massimo relativo stazionario

$x = -5$  e  $x = 0$  sono punti di minimo relativo non stazionari

$$f(0) = 0, \quad f(-5) = 0$$

$$f(-\frac{5}{2}) = \sqrt{\left| -\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{5}{2} + 5\right) \right|} = \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$



$x = -5$  e  $x = 0$  sono punti di minimo assoluto

Non ci sono punti di massimo assoluto, perché la funzione è illimitata superiormente.

Studiare la funzione  $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2x$ .

• Dominio

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x+2} > 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

• Funzione pari o dispari?

$$f(-x) = \log\left(\frac{-x-2}{-x+2}\right) - 2(-x) =$$

$$= \log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + 2x =$$

$$\frac{-x-2}{-x+2} = \frac{-1(x+2)}{-1(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$= \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{-1} + 2x =$$

$$= -\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + 2x =$$

$$= -\left[\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2x\right] = -f(x) \quad \forall x \in \text{dom}(f)$$

Quindi la funzione è dispari

• Limiti alla frontiera del dominio

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2x \right] = -\infty - 4 = -\infty$$

*Algebra dei limiti*

$x=2$  asintoto verticale destro

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[ \log \left( \frac{x-2}{x+2} \right) - 2x \right] = +\infty + 4 = +\infty$$

Algebra dei limiti

$\downarrow$   
 $+\infty$

$x=-2$  asintoto verticale sinistro

Osservazione. Una volta calcolato uno dei due limiti precedenti, si può ricavare l'altro dal fatto che la funzione è dispari.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \log \left( \frac{x-2}{x+2} \right) - 2x \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{x'} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{perché } f \text{ è dispari})$$

Non ci sono asintoti orizzontali

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x} \cdot \log \left( \frac{x-2}{x+2} \right) - 2x \cdot \frac{1}{x} \right] = -2$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \quad \text{perché } y = \frac{f(x)}{x} \text{ è pari}$$

Osservazione .  $y = \frac{f(x)}{x}$  è pari perché  $f$  è dispari  
 $\frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x}$  per ogni  $x \in \text{dom}(f) - \{0\}$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - \cancel{2x} + \cancel{2x} \right] = 0$$

$y = -2x$  è asintoto obliquo completo

• Derivata prima

$$f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-2}{x+2}} \cdot \frac{1 \cdot (x+2) - (x-2) \cdot 1}{(x+2)^2} - 2 =$$

$$= \frac{\cancel{x+2}}{x-2} \cdot \frac{\cancel{x+2} - \cancel{x} + 2}{(x+2)^2} - 2 =$$

$$= \frac{4}{(x-2)(x+2)} - 2 = \frac{4 - 2x^2 + 8}{(x-2)(x+2)} = \frac{12 - 2x^2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\text{dom}(f') = \text{dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Non ci sono punti di non derivabilità



Punti stazionari  $f'(x) = 0$

$$\frac{12 - 2x^2}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$12 - 2x^2 = 0$$

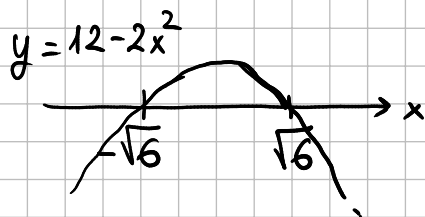
$$2x^2 = 12$$

$$x^2 = 6$$

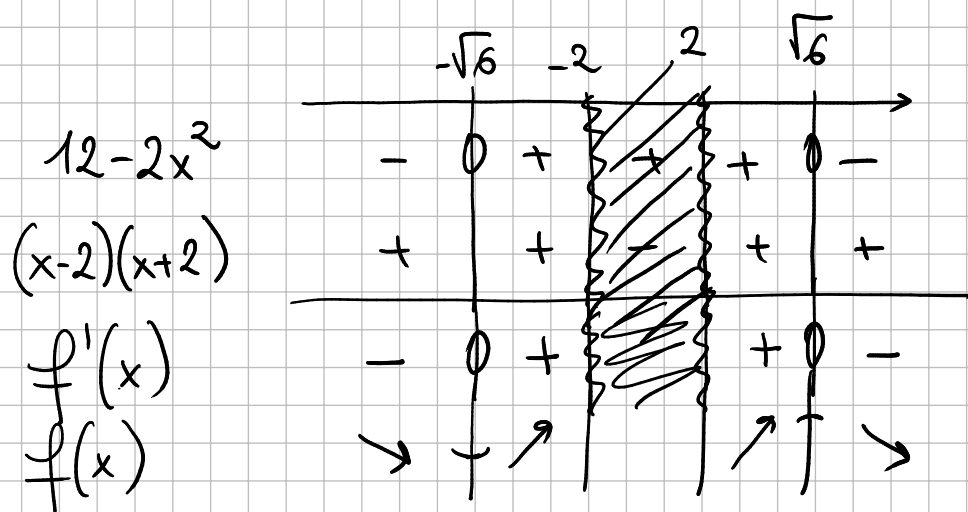
$$x = \pm\sqrt{6}$$

Dato che appartengono a  $\text{dom}(f') = \text{dom}(f)$ ,  
questi sono punti stazionari

$$12 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$$



$$(x-2)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$



$f$  è str. crescente in  $(-\sqrt{6}, -2)$  e in  $(2, \sqrt{6})$

$f$  è str. decrescente in  $(-\infty, -\sqrt{6})$  e in  $(\sqrt{6}, +\infty)$

$x = -\sqrt{6}$  punto di min. relativo stazionario

$x = \sqrt{6}$  punto di max. relativo stazionario

• Derivata seconda

$$f'(x) = \frac{12 - 2x^2}{x^2 - 4}$$

$$\text{dom}(f') = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2 - 4) - (12 - 2x^2) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{-4x(\cancel{x^3} - 4 + 6 - \cancel{x^2})}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

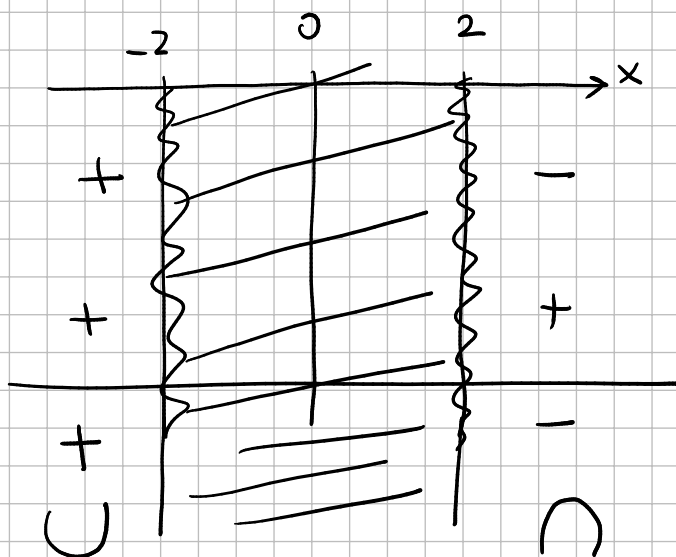
$$\text{dom}(f'') = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Segno di  $f''$

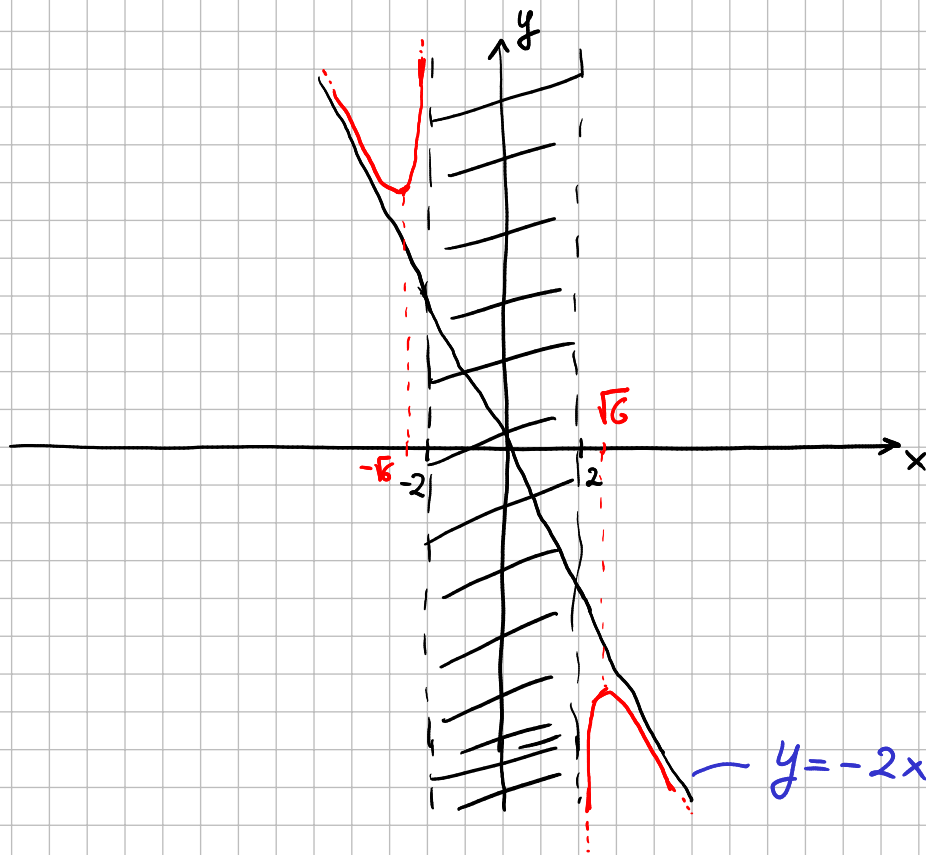
$$-8x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$(x^2 - 4)^2 > 0 \quad \forall x \in \text{dom}(f)$$

$$\begin{matrix} f''(x) \\ f(x) \end{matrix}$$



$f$  è convessa in  $(-\infty, -2)$  e concava in  $(2, +\infty)$ .



Non ci sono né punti di max assoluto né punti di min assoluto, perché la funzione è illimitata sia superiormente sia inferiormente.

Studiare la funzione  $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
definita da  $f(x) = x^2 \cdot e^x - 1$ .

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

La funzione non è né pari né dispari

Non ci sono asintoti verticali, perché  $f$  è continua in  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x e^x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}$$

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x - 1) = -1$$

Non ci sono asintoti orizzontali o obliqui destri:  
 $y = -1$  asintoto orizzontale sinistro

• Derivata prima

$$f(x) = x^2 e^x - 1$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x(x+2)e^x$$

$\text{dom}(f') = \mathbb{R}$  e non ci sono punti di non derivabilità

Punti stazionari  $f'(x) = 0$

$$x(x+2)e^x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -2$$

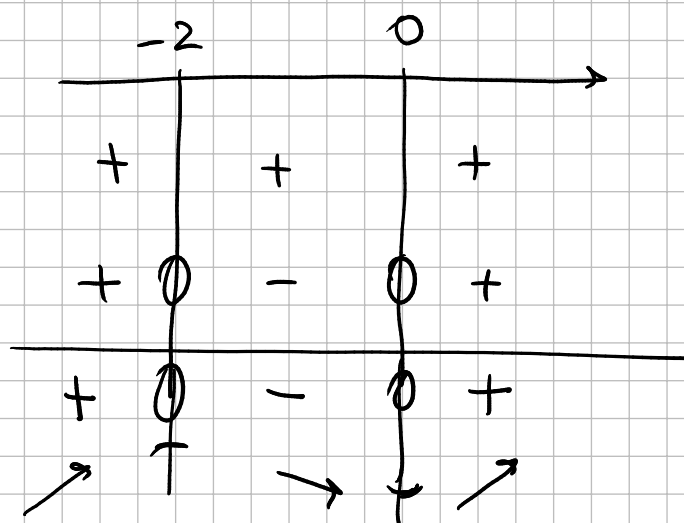
$$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Segno di  $f'$

$$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 0$$

$f'(x)$



$x = -2$  punto di max relativo stazionario

$x = 0$  punto di min relativo stazionario

$f$  è str. crescente in  $(-\infty, -2)$  e  $(0, +\infty)$

$f$  è str. decrescente in  $(-2, 0)$

• Derivata seconda

$$f''(x) = (x^2 + 2x)e^x$$

$$f''(x) = (2x+2) \cdot e^x + (x^2+2x) \cdot e^x =$$

$$= e^x (x^2 + 4x + 2) \quad \text{dom}(f'') = \mathbb{R}$$

• Segno di  $f''$

$$e^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + 4x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 - \sqrt{2} \vee x \geq -2 + \sqrt{2}$$

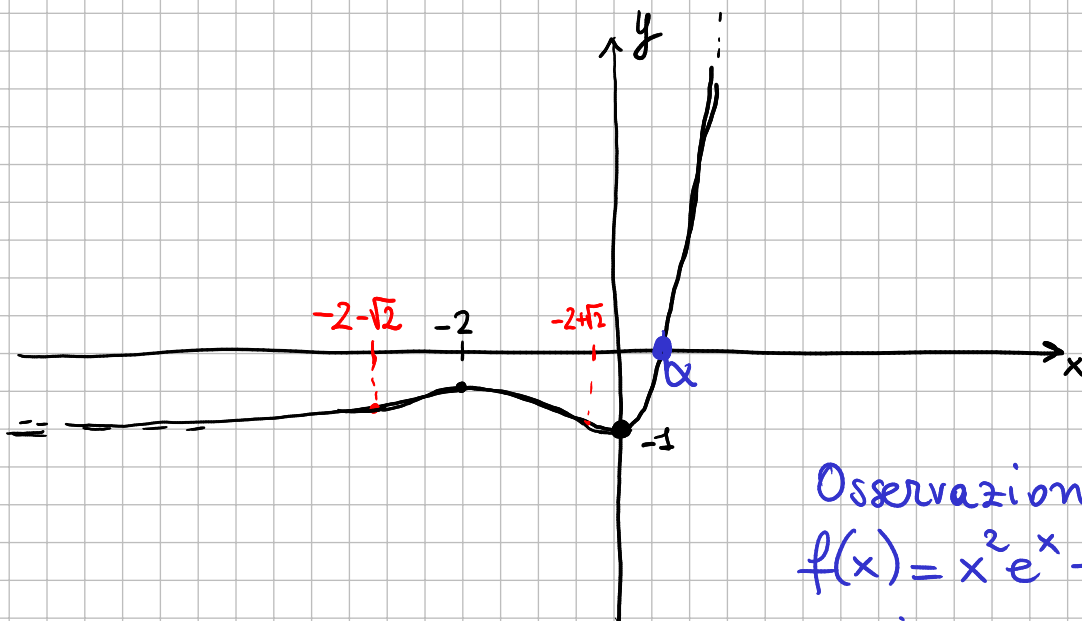
$$x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$

|          |             |               |   |               |   |   |
|----------|-------------|---------------|---|---------------|---|---|
|          |             | $-2-\sqrt{2}$ |   | $-2+\sqrt{2}$ |   |   |
|          |             |               |   |               | → |   |
|          |             | +             |   | +             | + |   |
|          |             |               |   |               |   |   |
|          | $+\sqrt{2}$ | +             | 0 | -             | 0 | + |
|          |             |               |   |               |   |   |
| $f''(x)$ |             | +             | 0 | -             | 0 | + |
|          |             |               |   |               |   |   |
|          |             | ∪             |   | ∩             |   | ∪ |

$f$  è convessa in  $(-\infty, -2-\sqrt{2})$  e in  $(-2+\sqrt{2}, +\infty)$

$f$  è concava in  $(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$

$x = -2-\sqrt{2}$  e  $x = -2+\sqrt{2}$  sono punti di flesso e tangente obliqua



Osservazione: la funzione  $f(x) = x^2 e^x - 1$  ha un unico zero  $\alpha \in (0, 1)$

$$f(0) = -1, \quad f(-2) = \frac{4}{e^2} - 1$$

Studiare la funzione  $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
definita da  $f(x) = \frac{1}{7} \log |x^2 e^x - 1|$

(14/11/2019 - studio fino alla derivata prima)

• Dominio

$$x^2 e^x - 1 \neq 0$$

$x \neq \alpha$ , dove  $\alpha$  è l'unico zero di  $f(x) = x^2 e^x - 1$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{\alpha\}$$

•  $f$  non è né pari né dispari, perché  $\text{dom}(f)$  non è  
simmetrico rispetto a 0

• Limiti alla frontiera del dominio

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{1}{7} \log |x^2 e^x - 1| = -\infty$$

$\downarrow$   
 $0^+$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{1}{7} \log |x^2 e^x - 1| = -\infty$$

$\downarrow$   
 $0^-$

$\rightarrow 0^+$

$x = \alpha$  asintoto verticale completo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{7} \log (x^2 e^x - 1) = +\infty$$

$\downarrow$   
 $+\infty$

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{7} \frac{\log(x^2 e^x - 1)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{7} \frac{\log\left(x^2 e^x \left(1 - \frac{1}{x^2 e^x}\right)\right)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{7} \frac{\log(x^2) + \log(e^x) + \log\left(1 - \frac{1}{x^2 e^x}\right)}{x} =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{7} \left[ \frac{2\log(x)}{x} + \frac{x'}{x} + \frac{1}{x} \log\left(1 - \frac{1}{x^2 e^x}\right) \right] = \frac{1}{7}$$

0      0      0

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{7} \log(x^2 e^x - 1) - \frac{1}{7} x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{7} \cdot 2\log(x) + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \log\left(1 - \frac{1}{x^2 e^x}\right) - \frac{1}{7} x \right] = -\infty$$

è infinito di ordine inferiore risp. a x      0      +\infty

Non ci sono né asintoto orizzontale né asintoto obliquo destro

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{7} \log|x^2 e^x - 1| = 0$$

-1      1

$y=0$  asintoto orizzontale sinistro



• Derivata prima

$$f(x) = \frac{1}{7} \log |x^2 e^x - 1|$$

Dall'esercizio precedente

$$\frac{d}{dx} (x^2 e^x - 1) = x(x+2)e^x$$

$$f'(x) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{|x^2 e^x - 1|}} \cdot \frac{\cancel{|x^2 e^x - 1|}}{x^2 e^x - 1} \cdot x(x+2)e^x =$$

$$= \frac{x(x+2)e^x}{7(x^2 e^x - 1)}$$

$$\text{dom}(f') = \text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$$

Non ci sono punti di non derivabilità

• Punti stazionari  $f'(x) = 0$

$$\frac{x(x+2)e^x}{7(x^2 e^x - 1)} = 0$$

$$x(x+2)e^x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 0$$

• Segno di  $f'$

$$e^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 0$$

$$x^2 e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$$

$f'(x)$   
 $f(x)$

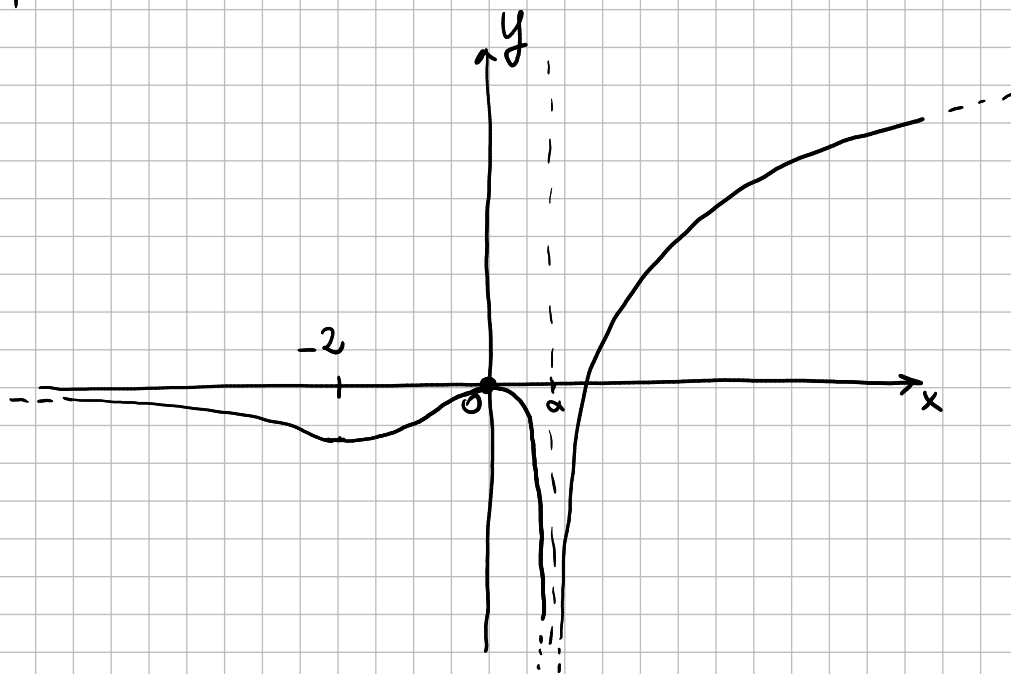
|         | -2 |   | 0 |   | $\alpha$ |   |
|---------|----|---|---|---|----------|---|
| $f'(x)$ | +  |   | + |   | +        | + |
| $f(x)$  | +  | 0 | - | 0 | +        | + |
|         | -  |   | - |   | -        | + |
| $f'(x)$ | -  | 0 | + | 0 | -        | + |
| $f(x)$  | -  | + | - | + | -        | + |

$f$  è str. crescente in  $(-2, 0)$  e in  $(\alpha, +\infty)$

$f$  è str. decrescente in  $(-\infty, -2)$  e in  $(0, \alpha)$

$x = -2$  punto di minimo relativo stazionario

$x = 0$  punto di massimo relativo stazionario



Non ci sono nè punti di max assoluto nè punti di min. assoluto.