

Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 31 ottobre 2024

Prima parte – Limiti di successioni e asintoti

1. Sia $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, una successione reale. Stabilire se ciascuna delle proposizioni seguenti è vera o falsa.

(a) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -9$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = -17$.

(b) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 3$.

(c) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 10$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 10$.

(d) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+5} = 15$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 15$.

(e) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, allora la successione $n \mapsto \cos(a_n)$ non ammette limite.

2. Applicando il criterio del rapporto, calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot e^n}$.

3. (Prova in itinere 14 novembre 2019) Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8 \cdot n^{7/n} - 7(n+8)^n + \left(\frac{8}{7}\right)^{2n}}{\sqrt{(n+7)^{2n} - n! - n!}}.$$

4. (Prova d'esame 9 gennaio 2009) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^n + \arctan(n!) + 1 - \cos \frac{1}{n^2}}{7^{\log n} + 2^n + \log(n^3)}.$$

5. (Prova in itinere 13 novembre 2009) Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da

$$f(x) = \arcsin(e^{-7x}) + \frac{x-2}{3} - \frac{\sin x}{2x}.$$

(a) Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

(b) Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

6. (Prova in itinere 16 novembre 2011) Si consideri la funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \frac{\sqrt{x-7} \log(x-7)}{x} - \frac{1}{x-7}.$$

(a) Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

(b) Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

Sia $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, una successione reale. Stabilire se ciascuna delle proposizioni seguenti è vera o falsa.

(a) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -9$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = -17$. **FALSA**

(b) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 3$. **VERA**

(c) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 10$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 10$. **FALSA**

(d) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+5} = 15$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 15$. **VERA**

(e) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, allora la successione $n \mapsto \cos(a_n)$ non ammette limite. **FALSA**

(a) a_{2n+1} è una sottosuccessione di a_n ,
quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -9$

(b) Se una successione a_n ha limite, allora tutte le sue sottosucc. hanno lo stesso limite.

(c) Per esempio, $a_n = (-1)^n \cdot 10$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(-1)^{2n}}_1 \cdot 10 = 10$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{-1} \cdot 10 = -10$$

Quindi a_n non ammette limite.

(d) a_{n+5} si ottiene da a_n "per traslazione" di 5 unità, quindi se a_{n+5} ha limite, allora a_n ha limite e i due limiti coincidono.

[Esercizio: dimostrare questo fatto applicando le def. di limite]

(e) Falsa perché, per esempio $a_n = \frac{\pi}{2} - 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - 2n\pi \right) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2n\pi\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$

Poniamo $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cancel{n!}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{\cancel{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e}$$

$$q = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$n!$ è infinito di ordine inferiore rispetto a n^n

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot e^n}$

Poniamo $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot e^n}$

$$Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overset{(2(n+1))!}{(2n+2)!}}{\left((n+1)!\right)^2 \cdot e^{n+1}} \cdot \frac{(n!)^2 \cdot e^n}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \left(\frac{n!}{(n+1)!} \right)^2 \cdot \frac{e^n}{e^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}} \cdot \left(\frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} \right)^2 \cdot \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n} \cdot e} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{(n+1)}(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{e} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \overset{\sim 2n}{(2n+1)}}{\underset{\sim n}{n+1}} \cdot \frac{1}{e} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2x}{x} \cdot \frac{1}{e} = \frac{4}{e}$$

$$Q = \frac{4}{e} > 1$$

Dunque $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

(14/11/2019) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8 \cdot n^{7/n} - 7(n+8)^n + \left(\frac{8}{7}\right)^{2n}}{\sqrt{(n+7)^{2n} - n!} - n!} = a_n$$

$$\bullet n^{7/n} = e^{\log n^{7/n}} = e^{7 \frac{\log n}{n}} \xrightarrow{\text{per confronto di infiniti}} e^0 = 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\bullet (n+8)^n \sim e^8 \cdot n^n$$

$$\bullet \left(\frac{8}{7}\right)^{2n} = \left[\left(\frac{8}{7}\right)^2\right]^n$$

n^n ha ordine infinito superiore a q^n (con $q > 1$)

$$8 \cdot n^{7/n} - 7(n+8)^n + \left(\frac{8}{7}\right)^{2n} \sim -7(n+8)^n \sim -7e^8 \cdot n^n \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-7e^8 \cdot n^n}{\sqrt{(n+7)^{2n} - n!} - n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-7e^8 \cdot n^n}{\sqrt{(n+7)^{2n} - n!} - n!} \cdot \frac{\sqrt{(n+7)^{2n} - n!} + n!}{\sqrt{(n+7)^{2n} - n!} + n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-7e^8 \cdot n^n [\sqrt{(n+7)^{2n} - n!} + n!]}{(n+7)^{2n} - n! - (n!)^2}$$

$$\bullet (n+7)^{2n} - n! - (n!)^2 =$$

$$= (n+7)^{2n} \left[1 - \frac{n!}{[(n+7)^2]^n} - \left(\frac{n!}{(n+7)^n} \right)^2 \right] \sim (n+7)^{2n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$



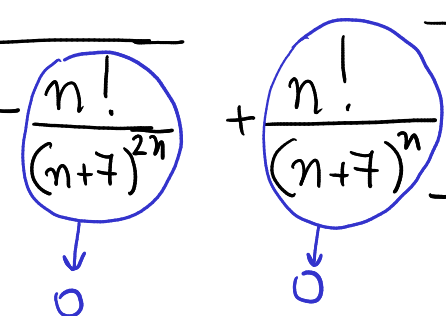
per confronto di infiniti

$$\bullet \sqrt{(n+7)^{2n} - n!} + n! =$$

$$= \sqrt{(n+7)^{2n} \left[1 - \frac{n!}{(n+7)^{2n}} \right]} + n! =$$

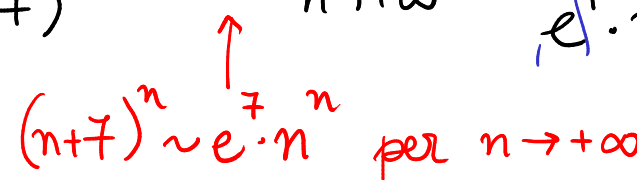
$$= (n+7)^n \sqrt{1 - \frac{n!}{(n+7)^{2n}}} + n! =$$

$$= (n+7)^n \left[\sqrt{1 - \frac{n!}{(n+7)^{2n}}} + \frac{n!}{(n+7)^n} \right] \sim (n+7)^n$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-7e^8 \cdot n^n \cdot (n+7)^n}{(n+7)^{2n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-7e^8 \cdot n^n}{(n+7)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-7e^8 \cdot n^n}{e^7 \cdot n^n} = -7e$$



 $(n+7)^n \sim e^7 \cdot n^n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$

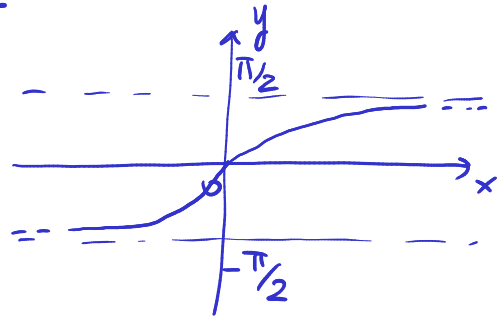
(09/01/2009) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^n + \arctan(n!) + 1 - \cos \frac{1}{n^2}}{7^{\log n} + 2^n + \log(n^3)} = a_n$$

$$\alpha^n + \arctan(n!) + 1 - \cos \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(n!) = \frac{\pi}{2}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = 0$$

$$7^{\log n} + 2^n + \log(n^3) = 7^{\log n} + 2^n + 3 \log n =$$

$$= 2^n \left(\frac{7^{\log n}}{2^n} + 1 + 3 \frac{\log n}{2^n} \right) \sim 2^n \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

0 per confronto di infiniti

$$\frac{7^{\log n}}{2^n} = \left(7^{\frac{\log n}{n}} \right)^n = \left(\frac{7^{\frac{\log n}{n}}}{2} \right)^n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

. Caso $\alpha > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^n =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2 \quad \left(\text{base } \frac{\alpha}{2} > 1 \right) \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \quad \left(\text{base } \frac{\alpha}{2} = 1 \right) \\ 0 & \text{se } 1 < \alpha < 2 \quad \left(\text{base } 0 < \frac{\alpha}{2} < 1 \right) \end{cases}$$

. Caso $\alpha = 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^n + \arctan(n!) + 1 - \cos \frac{1}{n^2}}{2^n} = 0$$

$\begin{matrix} \nearrow 1 & \nearrow \frac{\pi}{2} & \nearrow 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \searrow & \searrow & \searrow \\ & 2^n & \\ & \searrow & \\ & +\infty & \end{matrix}$

. Caso $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^n + \arctan(n!) + 1 - \cos \frac{1}{n^2}}{2^n} = 0$$

$\begin{matrix} \nearrow 0 & \nearrow \frac{\pi}{2} & \nearrow 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \searrow & \searrow & \searrow \\ & 2^n & \\ & \searrow & \\ & +\infty & \end{matrix}$

In conclusione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 2 \end{cases}$$

(Prova in itinere 13 novembre 2009) Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da

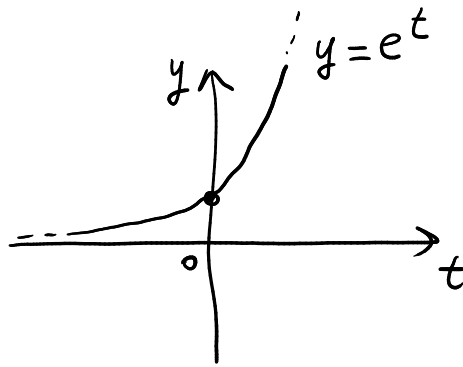
$$f(x) = \arcsin(e^{-7x}) + \frac{x-2}{3} - \frac{\sin x}{2x}.$$

- (a) Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
- (b) Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

$$\begin{cases} -1 \leq e^{-7x} \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

(perché $\arcsin(e^{-7x})$ abbia significato)

$$\begin{cases} e^{-7x} \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ e^{-7x} \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$



$$e^t > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} e^{-7x} \leq e^0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x \leq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{dom}(f) = (0, +\infty)$$

La funzione f non è né pari né dispari, perché il dominio non è simmetrico rispetto a 0

f è continua in $(0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\arcsin(e^{-7x}) + \frac{x-2}{3} - \frac{\sin x}{2x} \right) =$$

$$= \arcsin 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{7}{6}$$

$x=0$ NON è asintoto verticale

La funzione f non ha asintoti verticali

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\arcsin(e^{-7x})}_{\downarrow \arcsin 0 = 0} + \underbrace{\frac{x-2}{3}}_{\downarrow +\infty} - \underbrace{\frac{\sin x}{2x}}_{\downarrow 0} \right) = +\infty$$

f non ha asintoti orizzontali

Determiniamo l'eventuale as. obliquo

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{\arcsin(e^{-7x})}{x}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{x-2}{3x}}_{\downarrow \frac{1}{3}} - \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\downarrow 0} \right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{3}x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\arcsin(e^{-7x})}_{\downarrow 0} + \cancel{\frac{x}{3}} - \frac{2}{3} - \underbrace{\frac{\sin x}{2x}}_{\downarrow 0} - \cancel{\frac{1}{3}x} \right) = -\frac{2}{3}$$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ è asintoto obliquo destro per f

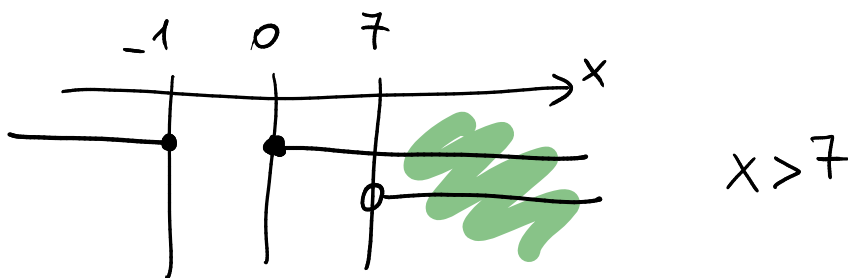
(Prova in itinere 16 novembre 2011) Si consideri la funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \frac{\sqrt{x-7} \log(x-7)}{x} - \frac{1}{x-7}.$$

- (a) Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
- (b) Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

$$\begin{cases} x^2 + x \geq 0 & (\text{radici quadrate}) \\ x - 7 \geq 0 & (\text{logaritmo}) \\ x - 7 > 0 \\ x \neq 0 \\ x - 7 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ x - 7 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ x > 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) \geq 0 \\ x > 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 0 \\ x > 7 \end{cases}$$



$$\text{dom}(f) = (7, +\infty)$$

La funzione non è né pari né dispari

f è continua in $(7, +\infty)$

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7^+} \sqrt{x-7} \log(x-7) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{\frac{1}{2}} \log y = \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{\frac{1}{2}} \log y \\ &\quad \begin{array}{l} \uparrow \\ y = x-7 \\ \text{se } x \rightarrow 7^+ \text{ allora } y \rightarrow 0^+ \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ z = \frac{1}{y} \\ \text{se } y \rightarrow 0^+ \text{ allora } z \rightarrow +\infty \end{array} \end{aligned}$$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{z^{1/2}} \log\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{-\log z}{z^{1/2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} \left(\sqrt{x^2 + x} - \frac{\sqrt{x-7} \log(x-7)}{x} - \frac{1}{x-7} \right) =$$

$\downarrow \sqrt{7^2 + 7}$ $\downarrow 7$ $\downarrow 0^+$

$$\stackrel{AL}{=} \sqrt{56} - 0 - \infty = -\infty$$

$x=7$ è asintoto verticale destro per f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \frac{\sqrt{x-7} \log(x-7)}{x} - \frac{1}{x-7} \right) = +\infty$$

$\sim x$ $\downarrow 0$ $\downarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-7} \log(x-7)}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{1/2} \log y}{y+7} =$$

$\uparrow$ $y = x-7$ $\sim y$
 se $x \rightarrow +\infty$ allora $y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{1/2} \log y}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y^{1/2}} = 0$$

Non ci sono asintoti orizzontali:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} - \frac{\sqrt{x-7} \log(x-7)}{x^2} - \frac{1}{x(x-7)} \right) =$$

$\uparrow 0$ $\uparrow 0$

$$= 1 - 0 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \frac{\overset{0}{\sqrt{x-7} \log(x-7)}}{\overset{0}{x}} - \frac{1}{x-7} - x \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}$$

$y = x + \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo destro per f

Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 31 ottobre 2024

Seconda parte – Studio della derivabilità

1. (Test 3 febbraio 2020) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(3x) - 1}{3x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + 49} - 7 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Discutere la derivabilità di f in $x = 0$.

2. (Prova d'esame 1 settembre 2017) Siano $\alpha \in]7, +\infty[$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha-7} \log x & \text{se } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Al variare di $\alpha \in]7, +\infty[$ discutere la derivabilità di f nel punto $x = 0$ e classificare il tipo di non derivabilità.

(03/02/2020) Sia $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ def. da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(3x) - 1}{3x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + 49} - 7 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Studiare la derivabilità in $x=0$

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 49} - 7 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + 49} - 7) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(3x) - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{9}{2}x^2}{3x} = 0$$

$$1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2 \text{ per } t \rightarrow 0$$

se $x \rightarrow 0$, allora
 $t = 3x \rightarrow 0$

$$\cos(3x) - 1 \sim -\frac{1}{2}(3x)^2 = -\frac{9}{2}x^2 \text{ per } x \rightarrow 0$$

Dato che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, la funzione f è continua in $x=0$.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} =$$

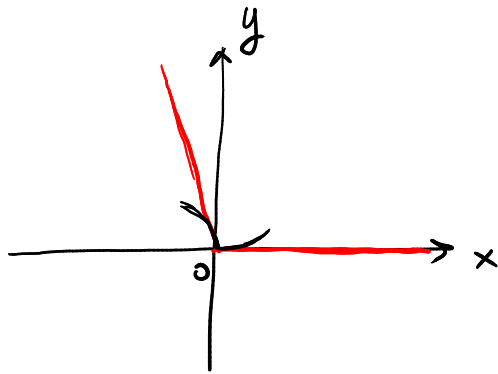
$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(3x) - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{9}{2}x^2 \cdot \frac{1}{3x^2} \right) = -\frac{3}{2}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \overset{0}{f(0)}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 49} - 7}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 49} + 7}{\sqrt{x^2 + 49} + 7} =$$

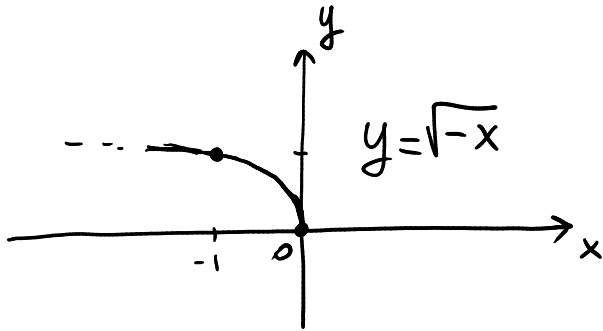
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \cancel{49} - \cancel{49}}{x(\sqrt{x^2 + 49} + 7)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x(\underbrace{\sqrt{x^2 + 49} + 7}_{14})} = 0$$

Dato che $f'_-(0) = -\frac{3}{2}$ e $f'_+(0) = 0$, la funzione non è derivabile in $x=0$ e $x=0$ è p.to angoloso.



(01/09/2017) Sia $\alpha \in (7, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha-7} \log x & \text{se } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



$$f(0) = \sqrt{-0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{(x^{\alpha-7})}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ perché } \alpha > 7}} \log x = 0$$

[Per ulteriori dettagli
si vede l'ultima pagina]

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - \overset{=0}{f(0)}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{-(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\sqrt{\frac{-x}{(-x)^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{-x}} \right) = -\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \overset{=0}{f(0)}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\alpha-7} \log x}{x} =$$

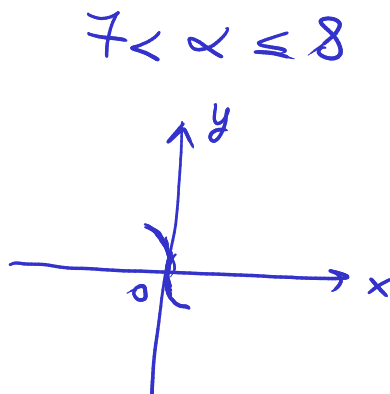
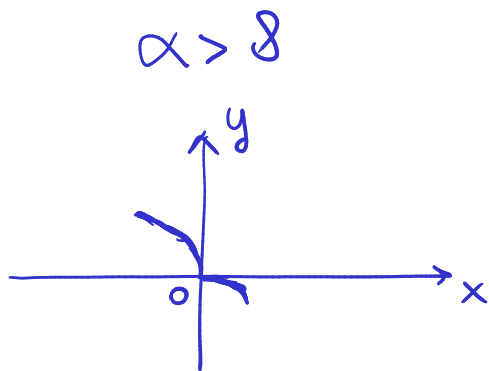
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-8} \log x = \begin{cases} +\infty \cdot (-\infty) = -\infty & \text{se } 7 < \alpha < 8 \\ 1 \cdot (-\infty) = -\infty & \text{se } \alpha = 8 \\ 0 & \text{se } \alpha > 8 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-8} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 8 \\ 1 & \text{se } \alpha = 8 \\ +\infty & \text{se } 7 < \alpha < 8 \end{cases}$$

Se $\alpha > 8$, allora $f'_-(0) = -\infty$ e $f'_+(0) = 0$, quindi $x=0$ è punto angoloso

Se $7 < \alpha \leq 8$, allora $f'_-(0) = -\infty$ e $f'_+(0) = -\infty$, quindi $f'(0) = -\infty$ e

la funzione non è derivabile in $x=0$ e $x=0$ è punto a tangente verticale



Chiarimento sul calcolo del limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-7} \log x, \text{ dove } \alpha \in (7, +\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-7} \log x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^{\alpha-7}} \log\left(\frac{1}{y}\right) =$$

$$y = \frac{1}{x}$$

se $x \rightarrow 0^+$ allora $y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\log y}{y^{\alpha-7}} = 0$$

LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\log z}{z^\beta} = 0 \quad \forall \beta > 0$$