Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 10 ottobre 2024

1. Calcolare il limite $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3x}$.

2. Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}}(x^2)$.

3. Calcolare i limiti $\lim_{x\to0^+} [x]$ e $\lim_{x\to0^-} [x]$.

4. Calcolare i limiti $\lim_{x\to0^+} \frac{|x|}{x}$ e $\lim_{x\to0^-} \frac{|x|}{x}$.

5. Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} (5\log(x) - 3x)$.

6. Calcolare il limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5 - 7x^2 - x + 5}{6x^5 + 2x^3 + 3x - 9}$.

7. Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} [(3x - 2x^5)(x^{10} + 4x^3)], \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{(3-2x)(3x+5)(4x^8-6)}{x - 3x^{10} + 2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x^5 - 3x + 1)(5x^4 - 3x^6 - 2)}{4x^{12} - 5x + 1}.$$

8. Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} (5^x - e^x)$.

9. Calcolare il limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 7^x}{x^3}$.

10. Calcolare i limiti $\lim_{x\to-\infty} \sinh x$ e $\lim_{x\to+\infty} \sinh x$.

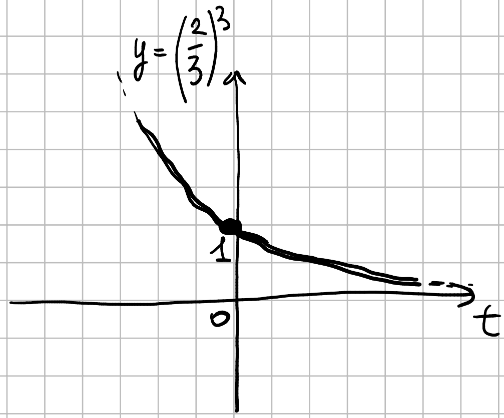
11. Calcolare i limiti $\lim_{x\to-\infty} \cosh x$ e $\lim_{x\to+\infty} \cosh x$.

12. Calcolare i limiti $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

13. Calcolare il limite $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{4-x} - \sqrt{-3-x})$.

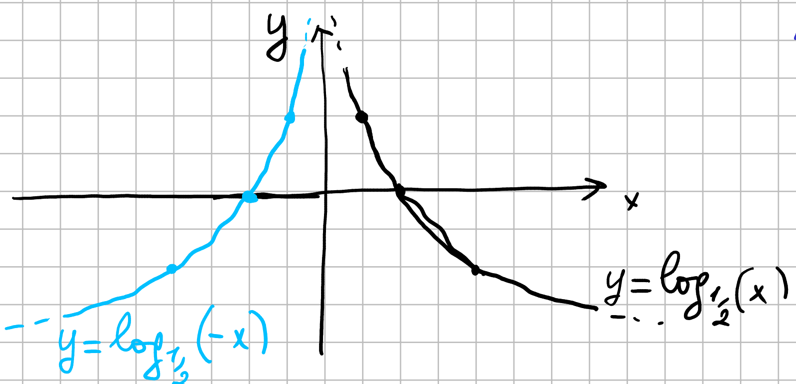
14. Calcolare il limite $\lim_{x\to0^+} \frac{\log 3x}{\log 7x}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{x} = +\infty$$



$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{2}}(x^2) = \lim_{x\to+\infty} 2\log_{\frac{1}{2}} x \underset{\uparrow \text{AL}}{=} -\infty$$



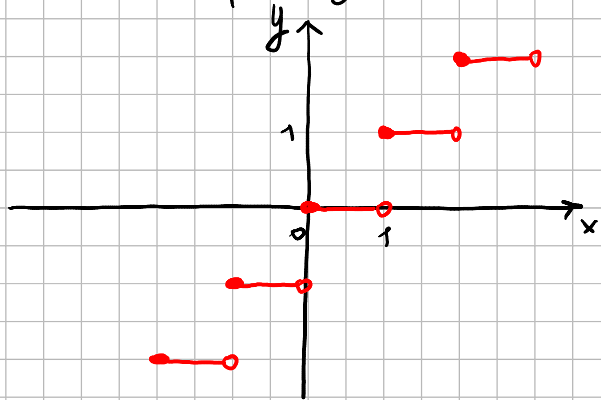
$$\lim_{x\to-\infty}\log_{\frac{1}{2}}(x^2) = \lim_{x\to-\infty} 2\log_{\frac{1}{2}}|x| = \lim_{x\to-\infty} 2\log_{\frac{1}{2}}(-x) \overset{\text{AL}}{=} -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}[x] = 0$$

$[x]$ è il più grande intero $\leq x$

$$\lim_{x\to0^-}[x] = -1$$

Non esiste $\lim_{x\to0}[x]$.

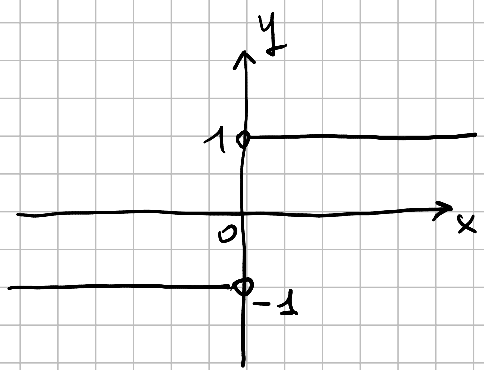


$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Non esiste $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{\cancel{x}}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{-x}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Osservazione. $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

CONFRONTO DI INFINITI

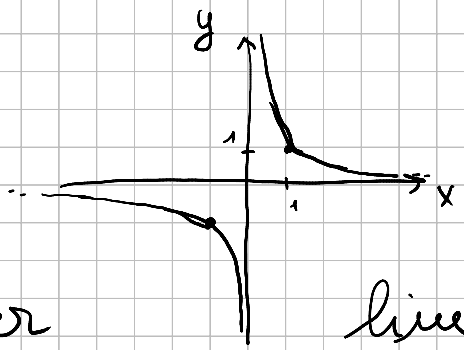
Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia f una funzione definita in un intorno di x_0, escluso eventualmente x_0.

Definizione. Si dice che f è INFINITESIMA per $x \to x_0$ quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Si dice che f è INFINITA per $x \to x_0$ quando
$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Esempi

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$

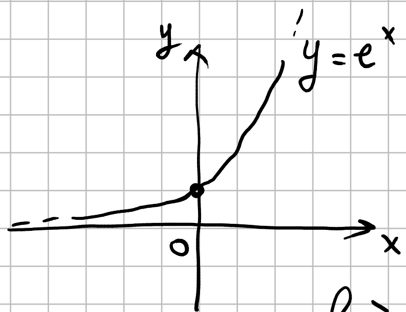


f è infinitesima per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- $f(x) = e^x$



f è infinita per $x \to +\infty$, perchè $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Nel seguito:

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

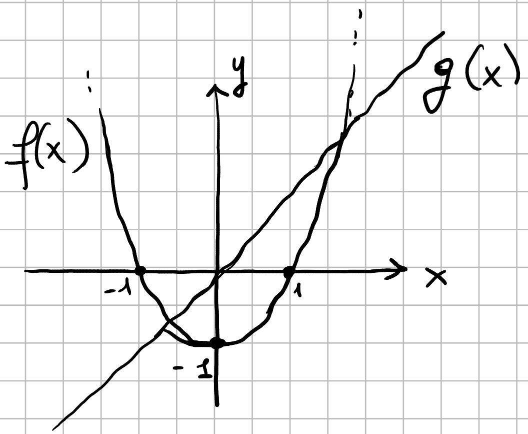
f, g funzioni definite in un intorno di x_0, escluso eventualmente x_0

f e g sono infinite per $x \to x_0$

Definizione. Si dice che f ha ordine di infinito superiore rispetto a g per $x \to x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Esempi

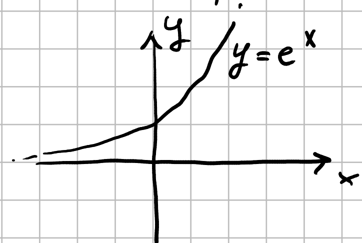


• $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = x$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{1}{x} \right) \overset{\text{AL}}{=} +\infty - 0 = +\infty$$

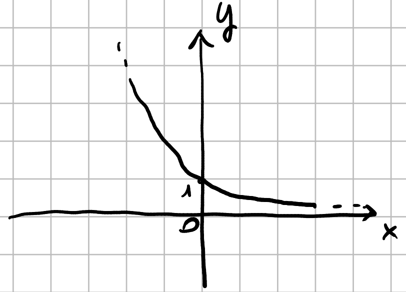
$x^2 - 1$ ha ordine di infinito superiore rispetto a x per $x \to +\infty$



• $f(x) = e^{2x} - e^{x} \qquad g(x) = e^x$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{2x} - e^{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^{2x}}_{+\infty} \left(1 - \underbrace{e^{-x}}_{0} \right) \overset{\text{AL}}{=} +\infty$$



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-e^{x}}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} (e^{x}-1) \overset{AL}{=} +\infty - 1 = +\infty$$

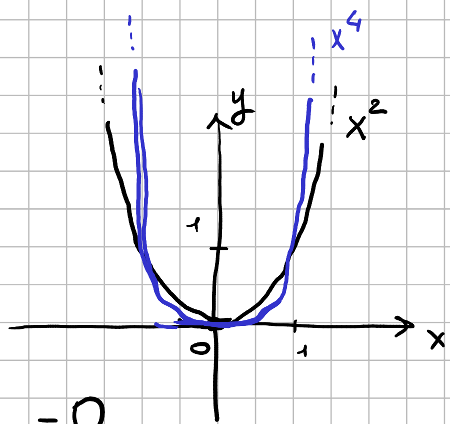
$e^{2x} - e^{x}$ ha ordine di infinito superiore rispetto a e^{x} per $x \to +\infty$

Definizione. Si dice che f ha ordine di infinito inferiore rispetto a g per $x \to x_0$ se e solo se

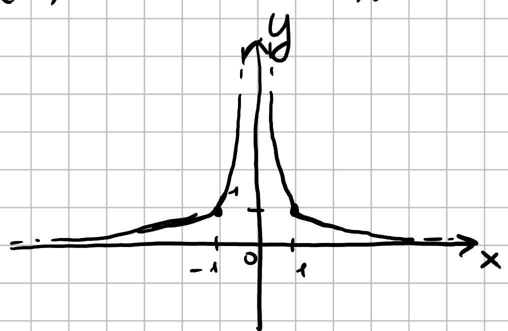
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Esempi

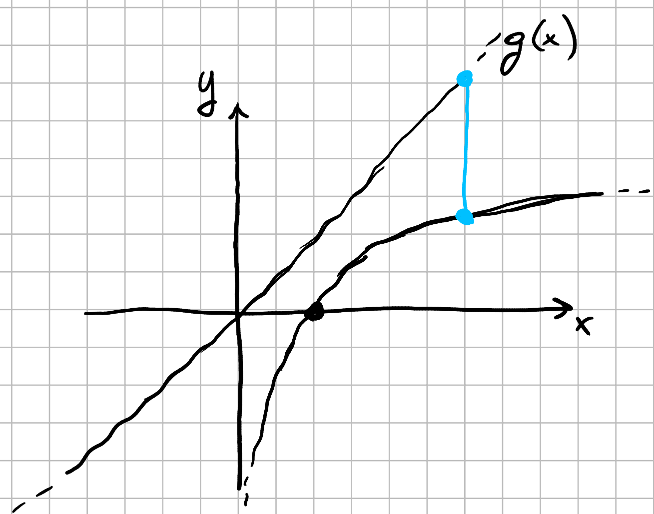
- $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^4$



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$



- $f(x) = \log(x), \quad g(x) = x$



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$$

$\log(x)$ ha ordine di infinito inferiore rispetto a x per $x \to +\infty$

In generale, vale il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Osservazione. Se $\alpha < 0$, allora x^α è INFINITESIMA per $x \to +\infty$.

Per esempio, $\alpha = -2$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x^{-2}} = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \log(x) \overset{AL}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Attenzione! NON è una forma indeterminata

Calcolare $\lim_{x \to +\infty} (\underbrace{5\log(x)}_{\downarrow \, +\infty} - \underbrace{3x}_{\downarrow \, +\infty})$

È una forma indeterminata $+\infty - \infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (5\log(x) - 3x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\downarrow \, +\infty} \Big(5 \underbrace{\frac{\log(x)}{x}}_{\downarrow \, 0} - 3\Big) \overset{AL}{=}$$

$$= +\infty(5 \cdot 0 - 3) = -\infty$$

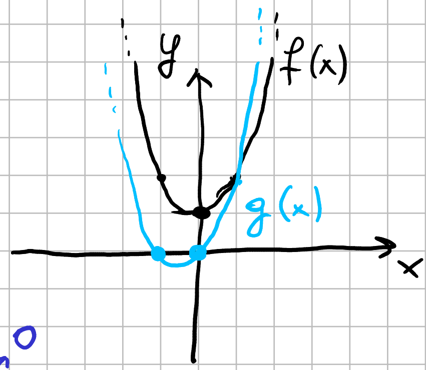
Definizione. Si dice che f ha lo stesso ordine di infinito di g per $x \to x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

In questo caso, si scrive $f(x) \sim \ell \cdot g(x)$ per $x \to x_0$.

Esempi

- $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = x^2 + x$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \overset{AL}{=} \frac{1+0}{1+0} = 1$$

- $f(x) = 2e^x, \quad g(x) = e^x + 2$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{e^x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(1 + 2e^{-x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 + 2e^{-x}} =$$

$$\overset{AL}{=} \frac{2}{1 + 2 \cdot 0} = 2$$

$$2e^x \sim 2(e^x + 2) \text{ per } x \to +\infty$$

$2e^x$ ha lo stesso ordine di infinito di $e^x + 2$ per $x \to +\infty$

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5-7x^2-x+5}{6x^5+2x^3+3x-9}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5-7x^2-x+5}{6x^5+2x^3+3x-9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^5}\left(2-\frac{7}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right)}{\cancel{x^5}\left(6+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}-\frac{9}{x^5}\right)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Il numeratore e il denominatore hanno lo stesso ordine di infinito per $x\to-\infty$.

IN GENERALE, una funzione polinomiale ha lo stesso ordine di infinito del monomio di grado massimo per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ \text{con}$$
$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ e } a_n \neq 0$$

$$g(x) = a_n x^n$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\dots+\frac{a_2}{a_n x^{n-2}}+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

$$= 1$$

Allo stesso modo, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$f(x) \sim a_n x^n$ per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$

Siano f_1, f_2, g_1, g_2 infinite per $x \to x_0$
Se $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$ per $x \to x_0$, allora

$$f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2 \quad \text{e} \quad \frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2} \quad \text{per } x \to x_0$$

Calcolare il limite

$$\lim_{x \to -\infty} \left[(3x - 2x^5) \cdot (x^{10} + 4x^3) \right]$$

$3x - 2x^5 \sim -2x^5$ per $x \to -\infty$

$x^{10} + 4x^3 \sim x^{10}$ per $x \to -\infty$

$(3x - 2x^5)(x^{10} + 4x^3) \sim (-2x^5) \cdot x^{10} = -2x^{15}$ per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[(3x - 2x^5)(x^{10} + 4x^3) \right] = \lim_{x \to -\infty} (-2x^{15}) \overset{AL}{=} -2 \cdot (-\infty) = +\infty$$

Calcolare il limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overset{\sim -2x}{(3-2x)} \overset{\sim 3x}{(3x+5)} \overset{\sim 4x^8}{(4x^8-6)}}{x - 3x^{10} + 2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(-2x) \cdot \cancel{3}x \cdot 4x^8}{-\cancel{3}x^{10}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8x^{10}}{x^{10}} = 8$$

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\overset{\sim 2x^5}{2x^5-3x+1})\cdot(\overset{\sim -3x^6}{5x^4-3x^6-2})}{\underset{\sim 4x^{12}}{4x^{12}-5x+1}} =$$

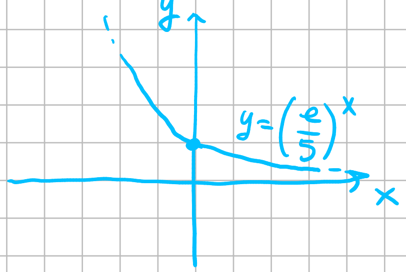
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{2}^{\,1}x^5\cdot(-3x^6)}{{}_{2}\cancel{4}x^{12}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3\cancel{x^{11}}^{\,1}}{2\cancel{x^{12}}_{\,x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}\right) \overset{AL}{=} -\frac{3}{2}\cdot 0 = 0$$

Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to+\infty}(\underset{\downarrow\, +\infty}{5^x}-\underset{\downarrow\, +\infty}{e^x})$

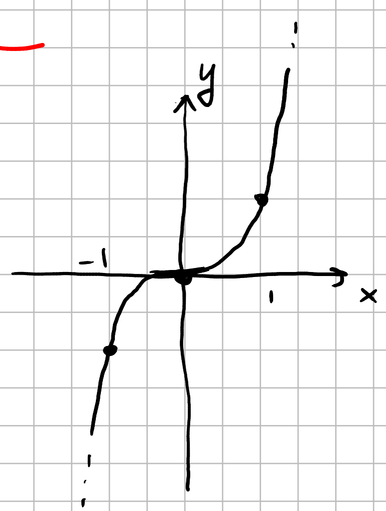
$$\lim_{x\to+\infty}(5^x-e^x) = \lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{5^x}\left(1-\underset{\downarrow\, 0}{\left(\frac{e}{5}\right)^x}\right) \overset{AL}{=} +\infty\cdot(1-0) =$$
$$= +\infty$$

$$0<\frac{e}{5}<1$$



Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-7^x}{x^3}$

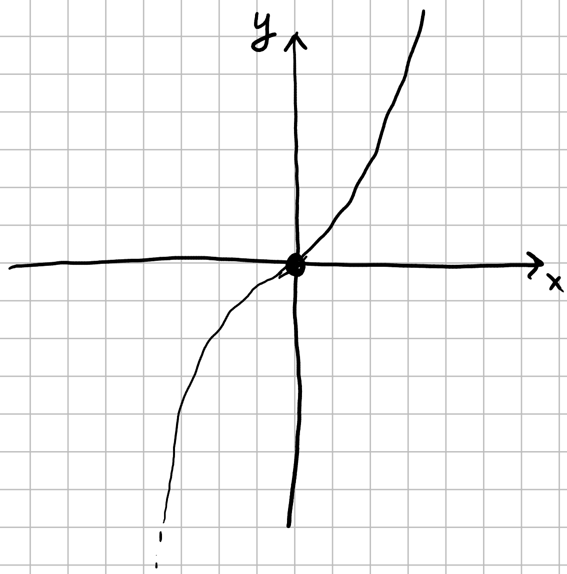
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{0}{e^x}-\overset{0}{7^x}}{\underset{-\infty}{x^3}} = \frac{0}{-\infty} = 0$$



<u>NON</u> è una forma indeterminata

SENO IPERBOLICO

$$\sinh(x) := \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$$\sinh(0) = \frac{e^{0}-e^{0}}{2} = 0$$

La funzione seno iperbolico ha dominio $\mathbb{R}$ e insieme immagine $\mathbb{R}$

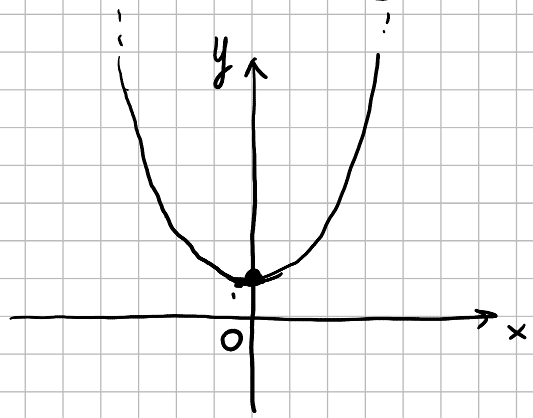
Esercizio: verificare che la funzione è dispari

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{+\infty}{e^{x}}-\overset{0}{e^{-x}}}{2} \overset{AL}{=} \frac{+\infty - 0}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{0}{e^{x}}-\overset{+\infty}{e^{-x}}}{2} \overset{AL}{=} \frac{0-\infty}{2} = -\infty$$

COSENO IPERBOLICO

$$\cosh(x) := \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$$\cosh(0) = \frac{e^{0}+e^{0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

La funzione coseno iperbolico ha dominio $\mathbb{R}$ e insieme immagine $[1,+\infty)$

Esercizio: verificare che la funzione è pari

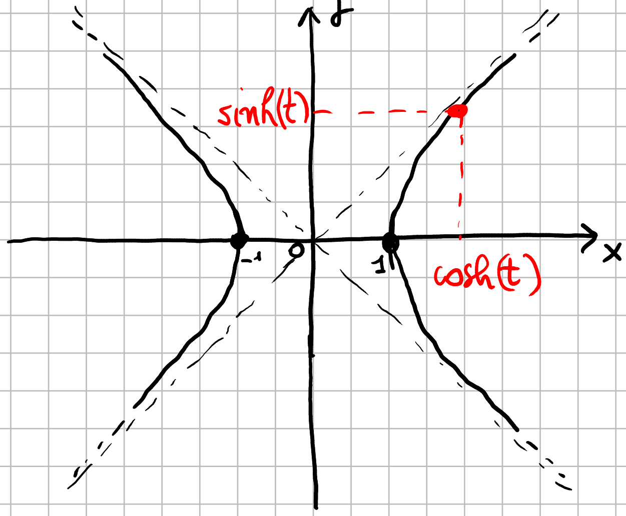
$$\lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{e^{x}}+\overset{\to 0}{e^{-x}}}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to 0}{e^{x}}+\overset{\to+\infty}{e^{-x}}}{2} = +\infty$$

Relazione fondamentale fra seno iperbolico e coseno iperbolico

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

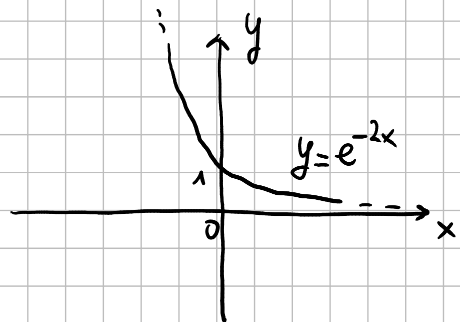
Per ogni $t \in \mathbb{R}$ il punto del piano di coordinate $(\cosh(t), \sinh(t))$ appartiene all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.



Calcolare i limiti

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^{x}}(1-e^{-2x})}{\cancel{e^{x}}(1+e^{-2x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\overbrace{e^{-2x}}^{0}}{1+\underbrace{e^{-2x}}_{0}} = 1$$

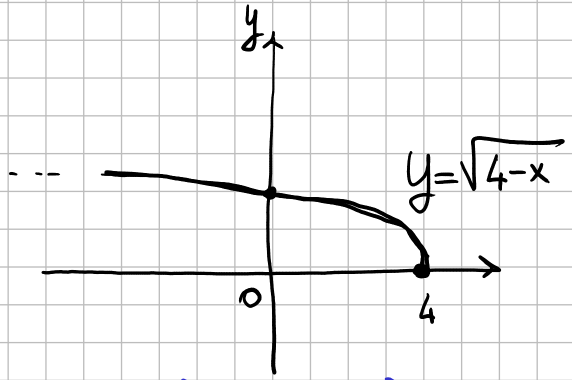


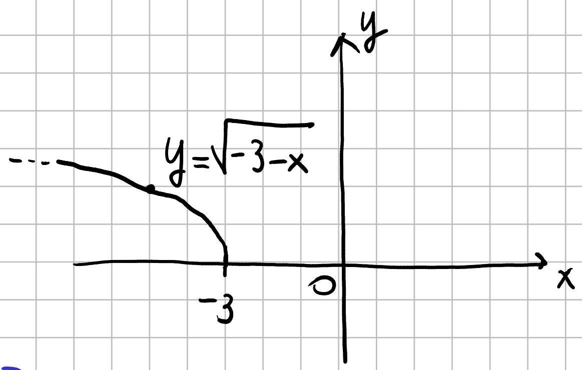
- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}-1)}{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^{2x}}^{0}-1}{\underbrace{e^{2x}}_{0}+1} = -1$$

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\sqrt{4-x}}_{\downarrow\,+\infty}-\underbrace{\sqrt{-3-x}}_{\downarrow\,+\infty}\right)$$





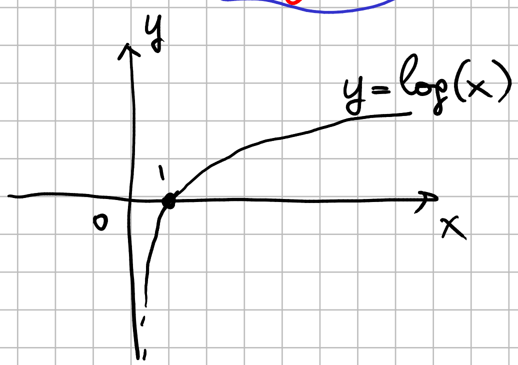
$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{-3-x}\right)\cdot\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{-3-x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{-3-x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-x-(-3-x)}{\sqrt{4-x}+\sqrt{-3-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{\underbrace{\sqrt{4-x}}_{\downarrow\,+\infty}+\underbrace{\sqrt{-3-x}}_{\downarrow\,+\infty}}=\frac{7}{+\infty}=0$$

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(3x)\to-\infty}{\log(7x)\to-\infty}$$



Da questo si ricavano i grafici di $y=\log(3x)$ e di $y=\log(7x)$ con opportune contrazioni lungo l'asse x

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(3x)}{\log(7x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log 3 + \log x}{\log 7 + \log x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\log(x)}\left(\frac{\log 3}{\log(x)} + 1\right)}{\cancel{\log(x)}\left(\frac{\log 7}{\log(x)} + 1\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\frac{\log 3}{\log(x)}}^{0} + 1}{\underbrace{\frac{\log 7}{\log(x)}}_{0} + 1} = 1$$