Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 9 ottobre 2024

1. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $(z^2 - 12i)(z^5 - 5) = 0$.

2. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + 4 = 3z$.

3. (Tema d'esame 30 gennaio 2017) Scrivere in forma cartesiana le radici cubiche complesse del numero $w = (1-i)^6 |e^{3+i}|$.

4. (Tema d'esame 3 settembre 2012) Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ appartenenti all'intersezione $A \cap B$, dove
$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^4 + 2^4 = 0\} \qquad \text{e} \qquad B = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z - \frac{1}{2}|\operatorname{Re} z| < 0\right\}.$$

5. (Tema d'esame 13 gennaio 2020) Calcolare le radici cubiche complesse del numero
$$w = \left(\frac{14}{\sqrt{3}-i} + \frac{7}{i}\right)^6$$
e scriverle in forma cartesiana.

6. (Tema d'esame 3 settembre 2009) Calcolare le radici complesse dell'equazione $z^4 - i|i-1|^2 z = 0$.

7. (Tema d'esame 11 gennaio 2012) Determinare le soluzioni in campo complesso del sistema
$$\begin{cases} z^3 + \overline{7^3 i} = 0 \\ |z - |z|^2 + z\overline{z} + 8| \leqslant \left|\dfrac{8}{i} e^{2\pi i}\right|. \end{cases}$$

Determinare le soluzioni complesse dell'equazione

$$(z^2-12i)(z^5-5)=0.$$

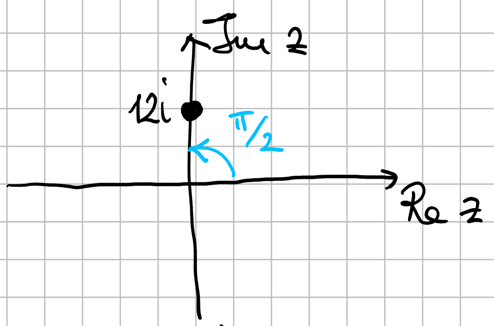
Per la legge di annullamento del prodotto, l'equazione è equivalente a

$$z^2-12i=0 \ \vee \ z^5-5=0$$

$z^2=12i$ (Notazioni delle slide) $n=2$

$w=12i$

$\rho=|12i|=12$



$$\begin{cases}\cos\vartheta=\dfrac{0}{12}=0\\ \sin\vartheta=\dfrac{12}{12}=1\end{cases}$$

$\vartheta=\frac{\pi}{2}$ Va bene

$z^2=12e^{i\frac{\pi}{2}}$

φ_0,φ_1 argomenti delle radici distinte

$r=\sqrt{\rho}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\varphi_0=\dfrac{\vartheta}{n}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow z_0=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\varphi_1=\varphi_0+\dfrac{2\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow z_1=2\sqrt{3}e^{i\frac{5}{4}\pi}$

Scriviamo z_0 e z_1 in forma algebrica

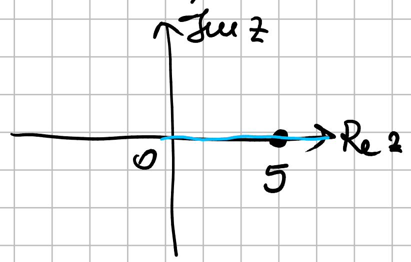
$$z_0=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{6}+i\sqrt{6}$$

$$z_1=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{6}-i\sqrt{6}$$

$$z^5 = 5 \qquad n = 5, \quad w = 5$$

$$\rho = |5| = 5$$

$$\vartheta = 0$$



$$z^5 = 5 \cdot e^{i0}$$

$$r' = \sqrt[5]{5}$$

$\varphi'_0, \varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4$ argomenti delle 5 radici distinte

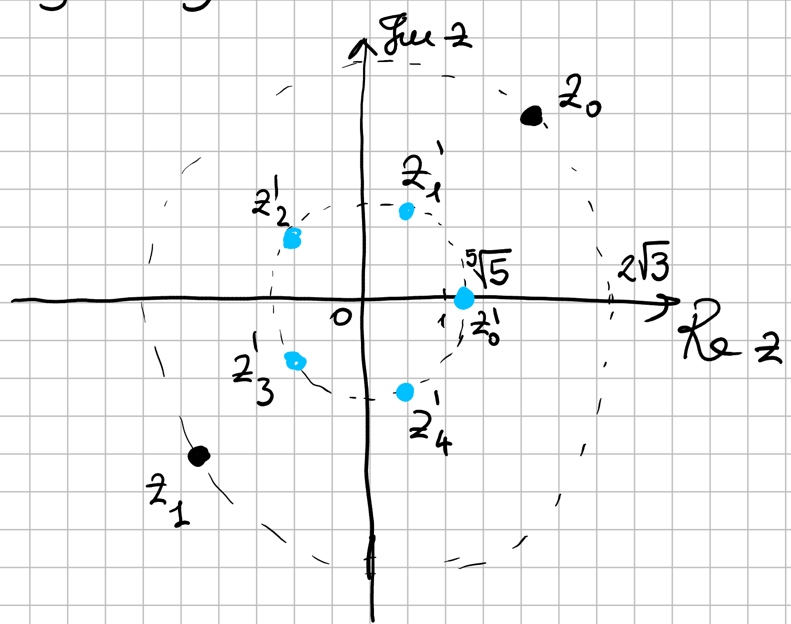
$$\varphi'_0 = \frac{0}{5} = 0 \implies z'_0 = \sqrt[5]{5} \cdot e^{i0} = \sqrt[5]{5}$$

$$\varphi'_1 = 0 + \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi \implies z'_1 = \sqrt[5]{5}\, e^{i\frac{2\pi}{5}}$$

$$\varphi'_2 = \frac{2}{5}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{4}{5}\pi \implies z'_2 = \sqrt[5]{5}\, e^{i\frac{4\pi}{5}}$$

$$\varphi'_3 = \frac{4}{5}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{6}{5}\pi \implies z'_3 = \sqrt[5]{5}\, e^{i\frac{6\pi}{5}}$$

$$\varphi'_4 = \frac{6}{5}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{8}{5}\pi \implies z'_4 = \sqrt[5]{5}\, e^{i\frac{8\pi}{5}}$$



Determinare le soluzioni complesse di

$$z^2 + 4 = 3z$$

Data un'equazione polinomiale di 2° grado della forma $az^2 + bz + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, allora,

detto $\Delta = b^2 - 4ac$ e w_0, w_1 radici quadrate complesse di Δ,

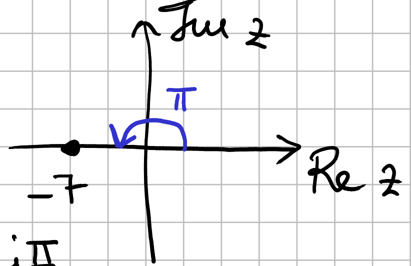
l'equazione di partenza ha soluzioni complesse

$$z_0 = \frac{-b + w_0}{2a} \quad e \quad z_1 = \frac{-b + w_1}{2a}$$

$$z^2 - 3z + 4 = 0 \qquad a = 1, \ b = -3, \ c = 4$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$$

Troviamo le radici quadrate complesse di -7, cioè risolviamo $z^2 = -7$



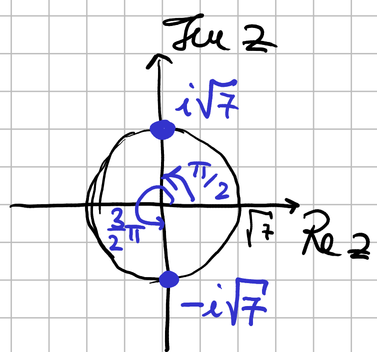
$$-7 = 7 \cdot e^{i\pi}$$

$$w_0 = \sqrt{7} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$w_1 = \sqrt{7} \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

$$w_0 = \sqrt{7}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{7}$$

$$w_1 = \sqrt{7}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \sin\frac{3}{2}\pi\right) = -i\sqrt{7}$$



Quindi le soluzioni complesse di

$$z^2 - 3z + 4 = 0 \quad \text{sono}$$

$$z_0 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} \quad e \quad z_1 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}$$

<u>Osservazione</u>. Se a è un numero reale negativo, il calcolo sopra mostra che le radici quadrate complesse di a sono

$$i\sqrt{|a|} \quad e \quad -i\sqrt{|a|}.$$

(30/01/2017) Scrivere in forma cartesiana le radici cubiche complesse di $w = (1-i)^6 |e^{3+i}|$

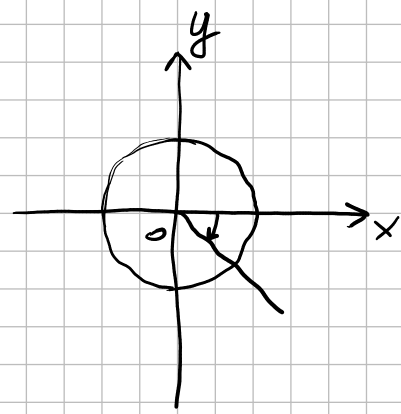
Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^3 = w$.

$$|e^{3+i}| = |e^3 \cdot e^i| = |e^3| \cdot |e^i| = e^3$$

Scriviamo $(1-i)$ in forma esponenziale

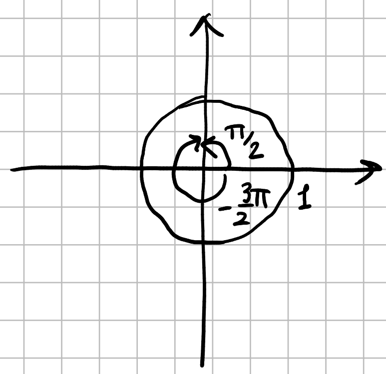
$$\rho = |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\vartheta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \vartheta = -\frac{\pi}{4} \text{ va bene}$$



$$1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$w = (1-i)^6 |e^{3+i}| = \left(2^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6 \cdot e^3 = 2^3 \cdot e^3 \cdot e^{-i\frac{3}{2}\pi} =$$
$$= (2e)^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$$



Risolviamo in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^3 = (2e)^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$n = 3, \quad \rho = (2e)^3, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$r = \sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{(2e)^3} = 2e$$

$$\varphi_0 = \frac{\vartheta}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2\pi}{n} = \frac{5}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{9}{6}\pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$z_0 = r \cdot e^{i\varphi_0} = 2e \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} =$$

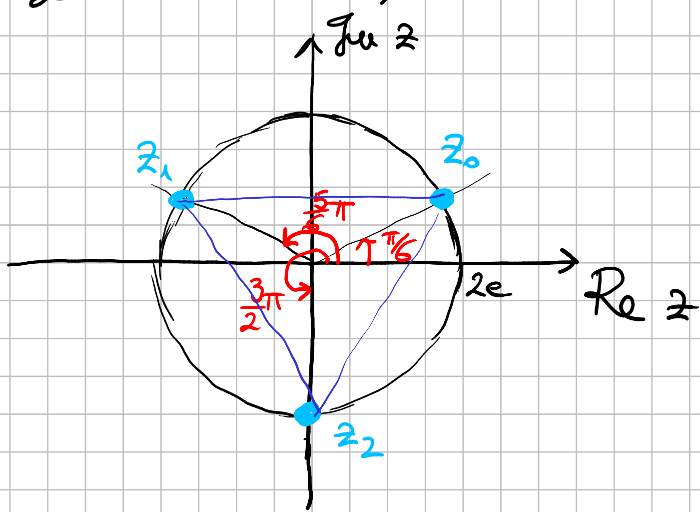
$$= 2e \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = e\left(\sqrt{3} + i\right)$$

$$z_1 = r \cdot e^{i\varphi_1} = 2e \cdot e^{i\frac{5}{6}\pi} =$$

$$= 2e\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \sin\frac{5}{6}\pi\right) = 2e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = e\left(-\sqrt{3} + i\right)$$

$$z_2 = r \cdot e^{i\varphi_2} = 2e \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} =$$

$$= 2e\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \sin\frac{3}{2}\pi\right) = -2e \cdot i$$

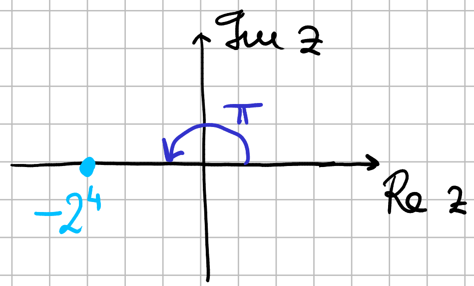


(03/09/2012) Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ appartiene all'intersezione $A \cap B$, dove $A = \{ z \in \mathbb{C} : z^4 + 2^4 = 0 \}$ e

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z - \frac{1}{2} |\operatorname{Re} z| < 0 \right\}.$$

A è l'insieme delle soluzioni complesse di

$$z^4 = -2^4$$



$w = -2^4 \qquad n = 4$

$\rho = |w| = 2^4$

$\vartheta = \pi$

$$r = \sqrt[4]{\rho} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$\varphi_0 = \frac{\vartheta}{n} = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2\pi}{n} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{2\pi}{n} = \frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1+i)$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{3}{4}\pi} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(-1+i)$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{5}{4}\pi} = 2\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(-1-i)$$

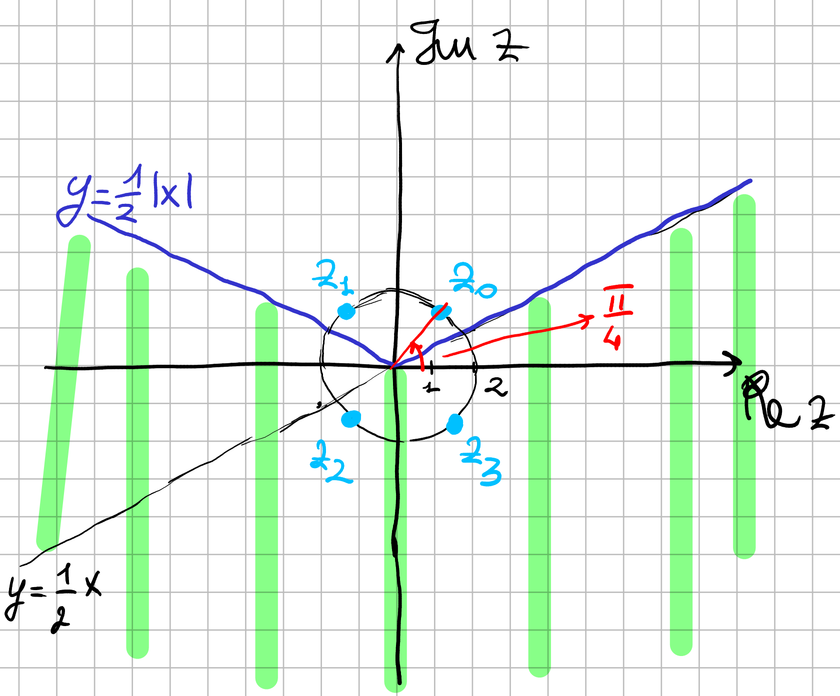
$$z_3 = 2e^{i\frac{7}{4}\pi} = 2\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1-i)$$

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z - \frac{1}{2}|\operatorname{Re} z| < 0 \right\}$$

$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$y - \frac{1}{2}|x| < 0$$

$$y < \frac{1}{2}|x|$$



Insieme B in verde

$$A \cap B = \{z_2, z_3\} = \{\sqrt{2}(-1-i), \sqrt{2}(1-i)\}$$

(13/01/2020) Calcolare le radici cubiche del numero $w = \left(\frac{14}{\sqrt{3}-i} + \frac{7}{i}\right)^6$ e scriverle in forma cartesiana.

$$w = \left(\frac{14}{\sqrt{3}-i} + \frac{7}{i}\right)^6 = \left[7\left(\frac{2}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{i}\right)\right]^6 =$$

$$= 7^6\left(\frac{2}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{i}\right)^6 =$$

$$= 7^6\left(\frac{2}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} + \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i}\right)^6 =$$

$$= 7^6\left(\frac{2(\sqrt{3}+i)}{3+1} - i\right)^6 =$$

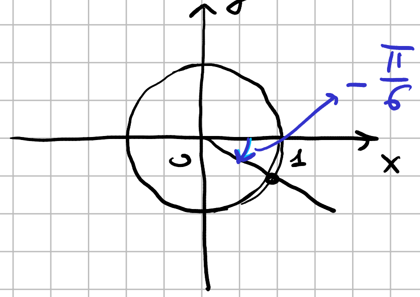
$$= 7^6\left(\frac{\overset{1}{\cancel{2}}(\sqrt{3}+i)}{\cancel{4}\,2} - i\right)^6 = 7^6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} - i\right)^6 =$$

$$= 7^6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^6$$

Scriviamo in forma esponenziale $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

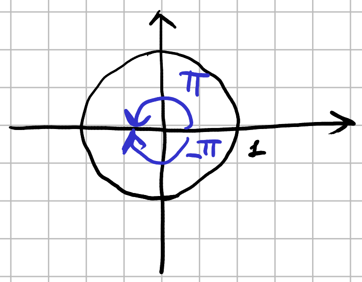
$$\begin{cases} \cos\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\vartheta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$w = 7^6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^6 = 7^6 \left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 7^6 e^{-i\pi} =$$

$$= 7^6 e^{i\pi}$$



Risolviamo $z^3 = 7^6 e^{i\pi}$

$n = 3, \; w = 7^6 e^{i\pi},$
$\rho = 7^6, \; \vartheta = \pi$

$$r = \sqrt[3]{7^6} = 7^2 = 49$$

$$\varphi_0 = \frac{\vartheta}{n} = \frac{\pi}{3}$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$$

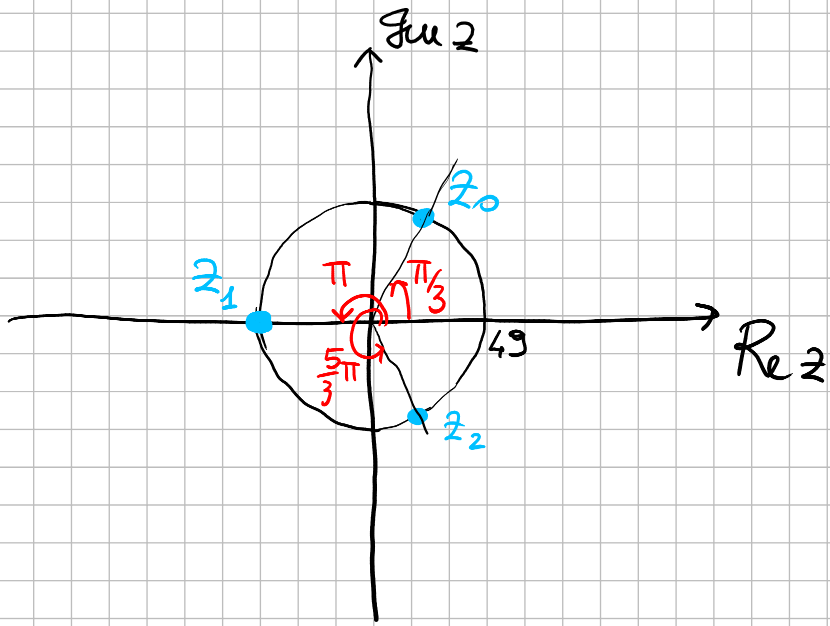
$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2\pi}{n} = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

$$z_0 = 49 e^{i\frac{\pi}{3}} = 49\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 49\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= \frac{49}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

$$z_1 = 49 e^{i\pi} = 49\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -49$$

$$z_2 = 49 e^{i\frac{5}{3}\pi} = 49\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{49}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$$


Im z
Re z
z_0
z_1
z_2
π
$\pi/3$
$\frac{5}{3}\pi$
49

(03/09/2009) Calcolare le radici complesse di

$$z^4 - i|i-1|^2 z = 0$$

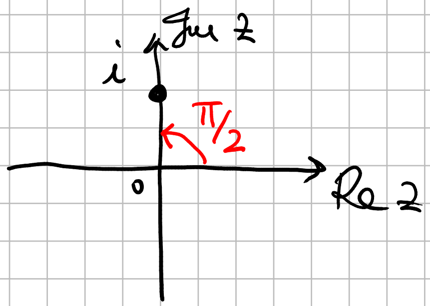
$$|i-1|^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2$$

$z^4 - 2iz = 0$ è equivalente a

$z(z^3 - 2i) = 0$, cioè

$z = 0 \ \vee \ z^3 - 2i = 0$

Calcoliamo le radici cubiche complesse di $z^3 = 2i$, che sono le soluzioni di $z^3 - 2i = 0$



$$\rho = |2i| = 2$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$z^3 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\qquad n = 3, \ \rho = 2, \ \vartheta = \frac{\pi}{2}$

$$r = \sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{2}$$

$$\varphi_0 = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

$$\varphi_2 = \frac{5}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

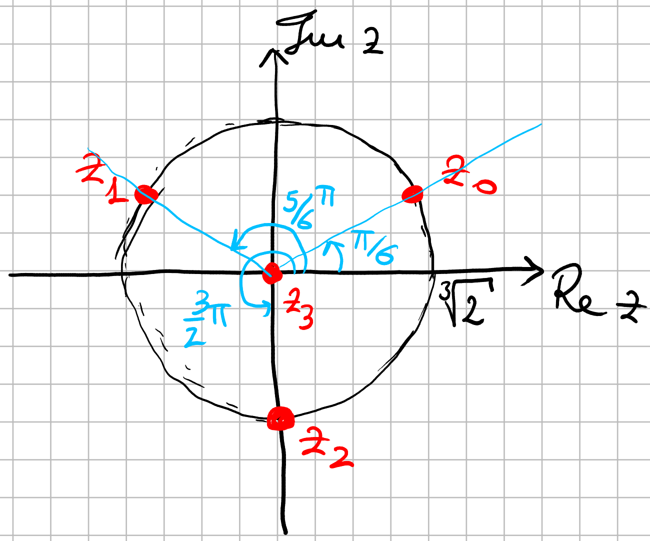
$$z_0 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \dots$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{5}{6}\pi} = \dots$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i\sqrt[3]{2}$$

$$z_3 = 0$$

(Esercizio: scrivere z_0 e z_1 in forma algebrica)



(11/01/2012) Determinare le soluzioni in campo complesso del sistema

$$\begin{cases} z^3 + \overline{7^3 i} = 0 \\ \left| z - |z|^2 + z\bar{z} + 8 \right| \leq \left| \dfrac{8}{i} e^{2\pi i} \right| \end{cases}$$

$$z^3 + \overline{7^3 i} = 0$$

$$z^3 - 7^3 i = 0$$

$$z^3 = 7^3 i$$

(Vedi esercizio precedente)

$$z_0 = 7e^{i\pi/6}, \quad z_1 = 7e^{i\frac{5}{6}\pi}, \quad z_2 = 7e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

$$\left| z - |z|^2 + z\bar{z} + 8 \right| \leq \left| \frac{8}{i} e^{2\pi i} \right|$$

$$\left| z - |z|^2 + |z|^2 + 8 \right| \leq \frac{|8|}{|i|} \cdot |e^{2\pi i}|$$

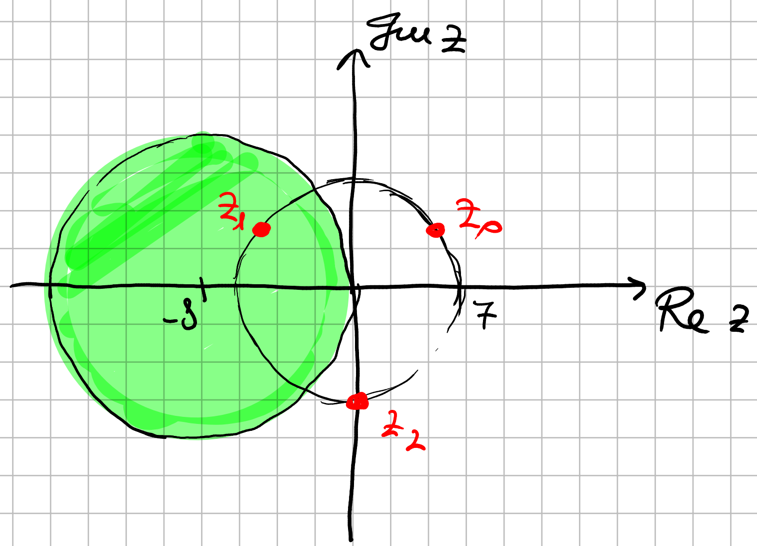
$|i| = 1$

$|e^{i2\pi}| = 1$

$$|z + 8| \leq 8$$

L'equazione $|z+8| = 8$ rappresenta la circonferenza di centro $-8+0i$ e raggio 8.

Quindi $|z+8| \leq 8$ rappresenta il cerchio delimitato da questa circonferenza, inclusa la circonferenza.



Il luogo geometrico cercato, cioè l'insieme delle soluzioni del sistema, è costituito dal solo punto corrispondente a $z_1 = 7e^{i\frac{5}{6}\pi}$.