Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 3 ottobre 2024

1. Scrivere in forma algebrica i numeri complessi
$$w_1 = \frac{2i^5 e^{-i\frac{3}{2}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \qquad \text{e} \qquad w_2 = (2e^{-5i\pi})^3 \left(e^{2-\frac{4i\pi}{3}}\right)^2.$$

2. Calcolare il modulo di $w = e^{3\log 2 - i\sqrt{7}}$.

3. Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$\frac{3z-4i}{1-iz} \in \mathbb{R}.$$

4. (Tema d'esame 1 aprile 2015) Determinare il luogo geometrico A dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$(|\mathrm{Re}(z)| + 3|\mathrm{Im}(z)|)\left(z\overline{z} - (\mathrm{Re}(z))^2 - ie^{\frac{3}{2}\pi i} - \frac{z+\overline{z}}{2}\right) = 0.$$

5. (Tema d'esame 1 settembre 2017) Sia A il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$\begin{cases} |z-i| \leqslant 3 \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{iz + 7\overline{z} + 1}{|z|^2+2}\right) \geqslant 0. \end{cases}$$
Calcolare l'area di A.

6. (Tema d'esame 10 gennaio 2013) Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$\begin{cases} (|z| + \mathrm{Re}\, z)^2(\mathrm{Im}\, z - 3\mathrm{Re}\, z + 4) \geqslant 0 \\ \left|z - \dfrac{4}{3}\right| \leqslant 1. \end{cases}$$

7. (Tema d'esame 30 agosto 2019) Determinare il luogo geometrico dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$\mathrm{Re}\left(\frac{i(z^2 + (\mathrm{Im}(z))^2) - z}{e^{i\frac{3}{2}\pi}(z\overline{z} - 7e^{4\pi i})}\right) = 0.$$

8. (Tema d'esame 10 luglio 2018) Determinare il luogo geometrico dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$z^2 - 4i\overline{z} + 6\mathrm{Im}(z) = -e^{11\pi i}.$$

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Im}\left(\frac{2}{z}\right) = 3$

$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{2}{x+iy}\right) = 3$$

$z \neq 0$ è equivalente a $(x,y) \neq (0,0)$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{2}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy}\right) = 3$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{2x - 2iy}{x^2+y^2}\right) = 3$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{2x}{x^2+y^2} + i\left(-\frac{2y}{x^2+y^2}\right)\right) = 3$$

$$-\frac{2y}{x^2+y^2} = 3$$

$$-2y = 3(x^2+y^2)$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y = 0$$

$$a = 0, \quad b = \frac{2}{3}, \quad c = 0$$

Centro $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$

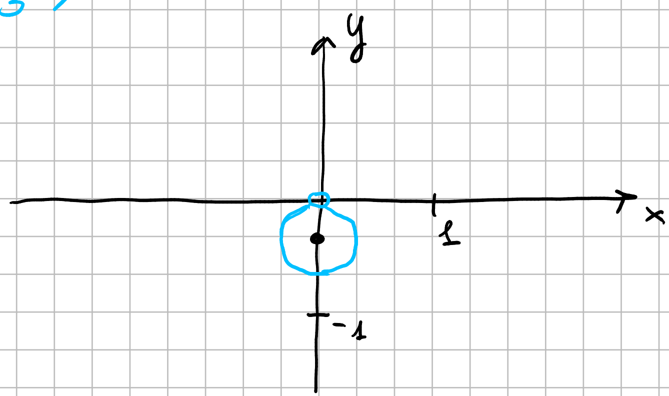
Raggio $r = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 0} = \frac{1}{3}$

Circonferenza in $\mathbb{R}^2$
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$
Centro $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$
Raggio $r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

CONCLUSIONE NELL'ESERCITAZIONE DEL 03/10/2024

$$x^2+y^2+\frac{2}{3}y=0, \quad \text{con} \quad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\underbrace{(x-0)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}_{\substack{\text{QUADRATO DELLA DISTANZA} \\ \text{FRA UN PUNTO } (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ \text{e } \left(0,-\frac{1}{3}\right)}}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$



Il luogo geometrico cercato è la circonferenza di centro $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$ e raggio $\frac{1}{3}$, privata del punto $(0,0)$.

Scrivere in forma algebrica i numeri complessi

$$w_1 = \frac{2i^5 e^{-i\frac{3}{2}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \qquad \text{e} \qquad w_2 = (2e^{-5i\pi})^3 \left(e^{2-\frac{4i\pi}{3}}\right)^2.$$

$$w_1 = \frac{2i^5 e^{-i\frac{3}{2}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2i^4 \cdot i \cdot e^{-i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$i^4 = 1$

$$= 2i\, e^{-i\frac{7}{4}\pi} = 2i\left(\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right)\right) =$$

$$= 2i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}i - \sqrt{2} = \sqrt{2}(i-1)$$

$$w_2 = \left(2e^{-5i\pi}\right)^3 \left(e^{2-\frac{4}{3}\pi i}\right)^2 =$$

$$= \left(2e^{i\pi}\right)^3 e^{4-\frac{8}{3}\pi i} =$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$e^{z} = e^{\operatorname{Re} z}\left(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)\right)$$

se $z \in \mathbb{C}$

$$= (-2)^3 \cdot e^4 \cdot \left[\cos\left(-\frac{8}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{8}{3}\pi\right)\right] =$$

$$= -8e^4 \left[\cos\left(\frac{8}{3}\pi\right) - i\sin\left(\frac{8}{3}\pi\right)\right] =$$

$\cos(-x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$= -8e^4 \left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right] =$$

$$= -8e^4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 4e^4 + 4e^4\sqrt{3}\,i$$

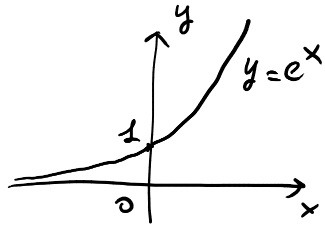
Calcolare il modulo di $w = e^{3\log 2 - i\sqrt{7}}$.

$$e^{z} = e^{\operatorname{Re} z}\left(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$|e^{z}| = \left|e^{\operatorname{Re} z}\left(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)\right)\right| =$$

$$= |e^{\operatorname{Re} z}|\,|\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)| =$$

$$= e^{\operatorname{Re} z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$



$$|w| = |e^{3\log 2 - i\sqrt{7}}| = e^{3\log 2} = e^{\log 8} = 8$$

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{3z-4i}{1-iz} \in \mathbb{R}$$

$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3z-4i}{1-iz}\right) = 0$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3x+3iy-4i}{1-i(x+iy)}\right) = 0$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3x+i(3y-4)}{1-ix+y}\right) = 0$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3x+i(3y-4)}{(1+y)-ix} \cdot \frac{(1+y)+ix}{(1+y)+ix}\right) = 0$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3x(1+y)-x(3y-4)+i\left(3x^2+(3y-4)(1+y)\right)}{(1+y)^2+x^2}\right) = 0$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3x(1+y)-x(3y-4)}{(1+y)^2+x^2} + i \cdot \frac{3x^2+3y^2+3y-4-4y}{(1+y)^2+x^2}\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &1 - iz \neq 0 \\ &iz \neq 1 \\ &z \neq \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} \\ &z \neq -i \end{aligned}}$$

$$\frac{3x^2+3y^2-y-4}{(1+y)^2+x^2} = 0$$

$$3x^2+3y^2-y-4 = 0$$

$$x^2+y^2-\frac{1}{3}y-\frac{4}{3} = 0$$

$a = 0$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = -\frac{4}{3}$

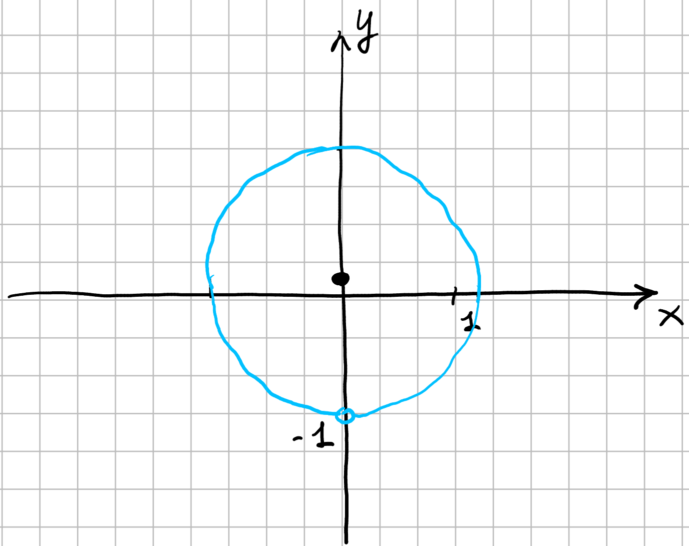
$$(x-0)^2 + \left(y-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{36}$$

Centro $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{6}\right)$

$r = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{4}{3}} = \frac{7}{6}$

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{6}\right)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2$$

Circonferenza di centro $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ e raggio $\frac{7}{6}$



Il luogo geometrico cercato è la cf. di centro $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ e raggio $\frac{7}{6}$, privata del punto $(0,-1)$.

(Tema d'esame 01/04/2015)

Determinare il luogo geometrico A dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left(|\mathrm{Re}\, z| + 3|\mathrm{Im}\, z|\right)\left(z\bar{z} - (\mathrm{Re}\, z)^2 - i e^{i\frac{3}{2}\pi} - \frac{z+\bar{z}}{2}\right) = 0$$

L'equazione data è equivalente a

$$|\mathrm{Re}\, z| + 3|\mathrm{Im}\, z| = 0 \quad \vee \quad z\bar{z} - (\mathrm{Re}\, z)^2 - i e^{i\frac{3}{2}\pi} - \frac{z+\bar{z}}{2} = 0$$

(per la legge di annullamento del prodotto)

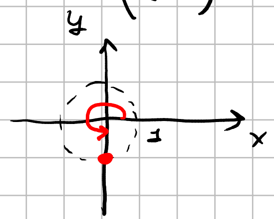
$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{|x|}_{\geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}} + 3\underbrace{|y|}_{\geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}} = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy}}{2} = x$$

$$e^{i\frac{3}{2}\pi} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i$$



$$z\bar{z} - (\mathrm{Re}\, z)^2 - i e^{\frac{3}{2}\pi i} - \frac{z+\bar{z}}{2} = 0$$

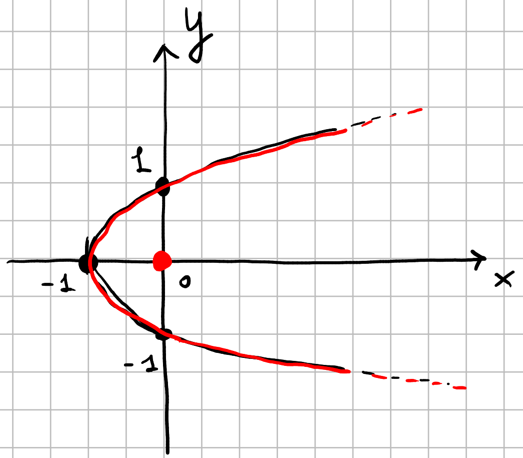
$$\cancel{x^2} + y^2 - \cancel{x^2} - i \cdot (-i) - x = 0$$

$$y^2 - 1 - x = 0$$

$$x = y^2 - 1$$

L'equazione rappresenta una parabola con asse di

simmetria parallela all'asse x e vertice $(-1,0)$.
L'asse di simmetria coincide con l'asse x, perché l'equazione è della forma $x = ay^2 + by + c$, con $b = 0$

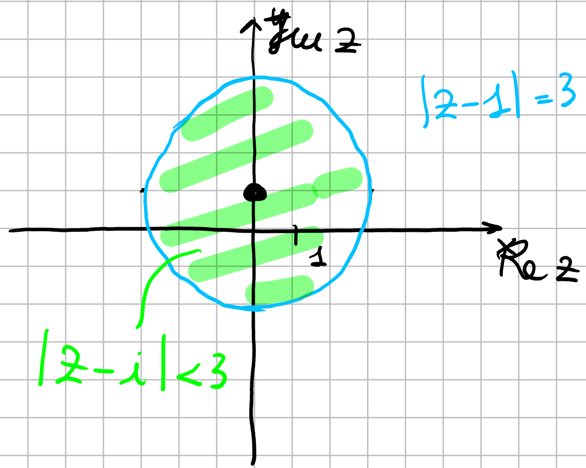


Il luogo geometrico A è l'unione della parabola di equazione $x = y^2 - 1$ e dell'insieme costituito dal solo punto $(0,0)$.

(Tema d'esame 01/09/2017) Sia A il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} |z-i| \leq 3 \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{iz+7\bar{z}+1}{|z|^2+2}\right) \geq 0 \end{cases}$$

Calcolare l'area di A.



$$\underbrace{|z-i|}_{} \leq 3$$

DISTANZA FRA UN NUMERO COMPLESSO z E i

$|z-i| \leq 3$ rappresenta il cerchio di centro i e raggio 3, circonferenza inclusa

$$\mathrm{Re}\left(\frac{iz+7\bar{z}+1}{|z|^2+2}\right) \geq 0$$

$|z|^2+2 \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$|z|^2 \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{ix-y+7x-7iy+1}{x^2+y^2+2}\right) \geq 0$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{7x-y+1}{x^2+y^2+2} + i\,\frac{x-7y}{x^2+y^2+2}\right) \geq 0$$

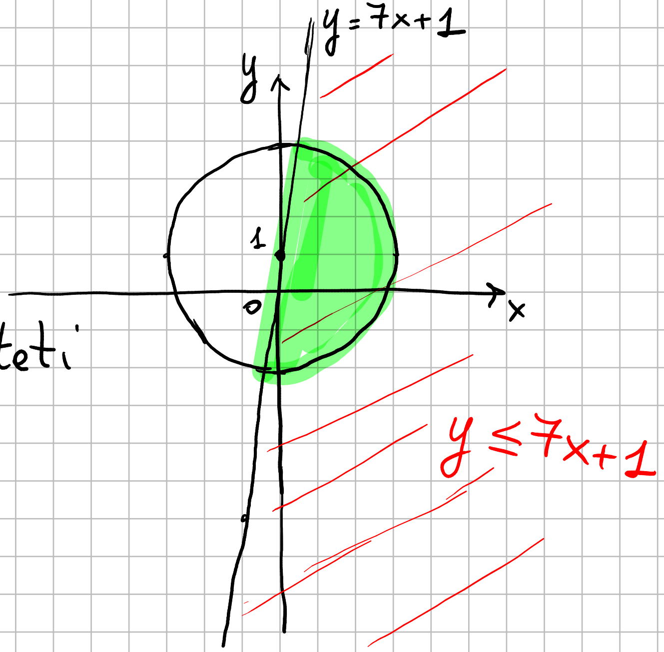
$$\frac{7x-y+1}{x^2+y^2+2} \geq 0$$

perché $x^2+y^2+2 > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$7x-y+1 \geq 0$$

$y \leq 7x + 1$

La disequazione rappresenta uno dei semipiani delimitati dalla retta di equazione $y = 7x + 1$

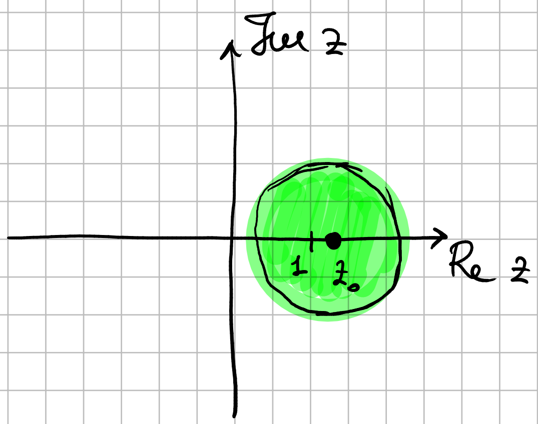


Il luogo geometrico A è un semicerchio del cerchio con centro $(0, 1)$ e raggio 3, quindi la sua area è $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$.

(Tema d'esame 10/01/2013) Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} (|z| + \operatorname{Re} z)^2 (\operatorname{Im} z - 3\operatorname{Re} z + 4) \geq 0 \\ \left| z - \frac{4}{3} \right| \leq 1 \end{cases}$$

$\left| z - \frac{4}{3} \right| = 1$ rappresenta la circonferenza di centro $z_0 = \frac{4}{3}$ e raggio 1



La disequazione $\left| z - \frac{4}{3} \right| \leq 1$ rappresenta tutto il cerchio, circonferenza inclusa

$$(|z| + \operatorname{Re} z)^2 (\operatorname{Im} z - 3\operatorname{Re} z + 4) \geq 0$$

$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

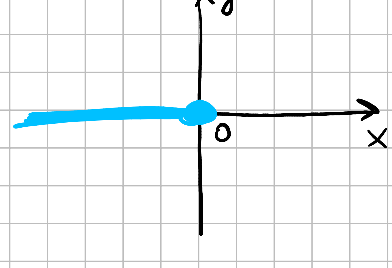
$$\left(\sqrt{x^2+y^2} + x\right)^2 (y - 3x + 4) \geq 0$$

Se A e B sono numeri reali, allora $A^2 B \geq 0$ è equivalente

$A = 0 \vee B \geq 0$

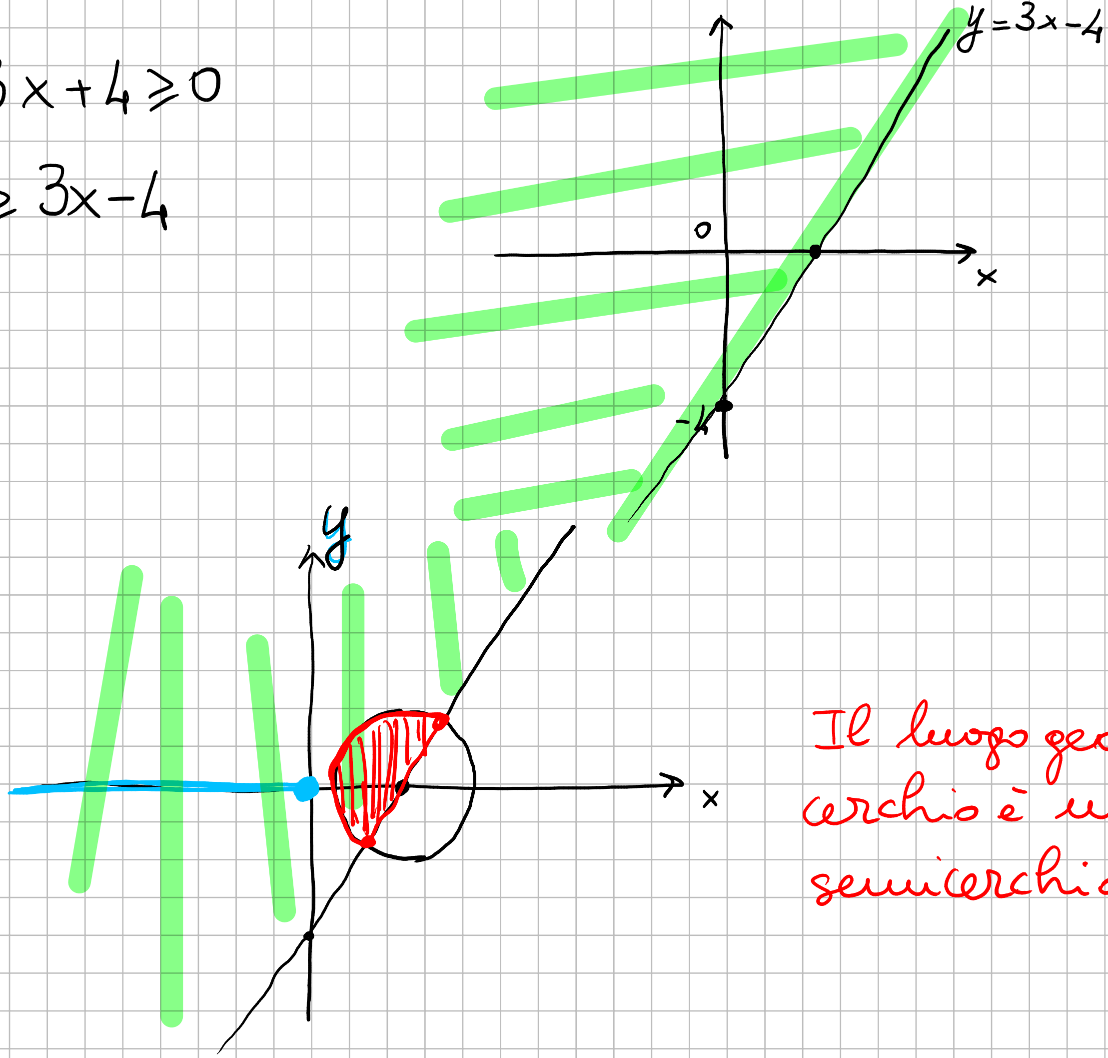
$$\sqrt{x^2+y^2} + x = 0 \quad \vee \quad y - 3x + 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = -x \\ -x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x^2} + y^2 = \cancel{x^2} \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$



$y - 3x + 4 \geq 0$

$y \geq 3x - 4$



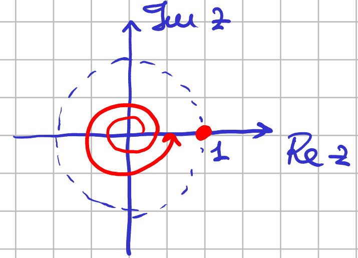
Il luogo geometrico cerchio è un semicerchio.

(Tema d'esame 30/08/2019) Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\mathrm{Re}\left(\frac{i\left(z^2+(\mathrm{Im}\, z)^2\right)-z}{e^{i\frac{3}{2}\pi}\left(z\bar{z}-7e^{4\pi i}\right)}\right)=0$$

$$e^{i\frac{3}{2}\pi}=\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-i$$

$$e^{4\pi i}=\cos(4\pi)+i\sin(4\pi)=1$$



$z=x+iy$, con $x,y\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{i\left((x+iy)^2+y^2\right)-(x+iy)}{-i\left(x^2+y^2-7\cdot 1\right)}\right)=0$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{i\left(x^2+2ixy-\cancel{y^2}+\cancel{y^2}\right)-x-iy}{-i\left(x^2+y^2-7\right)}\right)=0$$

Perché il quoziente abbia significato, si deve porre $x^2+y^2-7\neq 0$

L'equazione $x^2+y^2-7=0$ è equivalente a

$$(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\sqrt{7}\right)^2,$$ quindi

rappresenta la crf. con centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{7}$.

Vanno esclusi tutti i punti di questa circonferenza

$$\mathrm{Re}\left(\frac{i\left(x^2+2ixy\right)-x-iy}{-i\left(x^2+y^2-7\right)}\cdot\frac{i}{i}\right)=0$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{-\left(x^2+2ixy\right)-ix+y}{x^2+y^2-7}\right)=0$$

$$-i\cdot i=-i^2=-(-1)=1$$

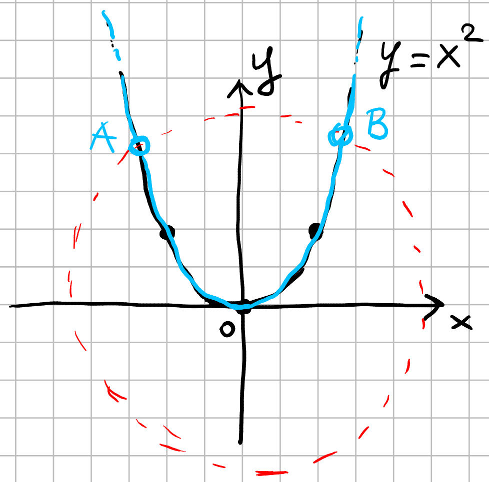
$$Re\left(\frac{-x^2+y-i(2xy+x)}{x^2+y^2-7}\right)=0$$

$$Re\left(\frac{-x^2+y}{x^2+y^2-7}-i\cdot\frac{2xy+x}{x^2+y^2-7}\right)=0$$

$$\frac{-x^2+y}{x^2+y^2-7}=0$$

$$-x^2+y=0$$

$$y=x^2$$



Il luogo geometrico cercato è la parabola di equazione $y=x^2$, esclusi i suoi punti appartenenti alla circonferenza con centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{7}$

I punti esclusi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+y^2-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ y+y^2-7=0 \end{cases}$$

$$y^2+y-7=0$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$$

$y=\frac{-1-\sqrt{29}}{2}$ non accettabile perché $y\geq 0$

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\frac{-1+\sqrt{29}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{29}}{2}} \\ y=\frac{-1+\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$A\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{29}}{2}}, \frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$B\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{29}}{2}}, \frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$

(Tema 10/07/2018) Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^2 - 4i\bar{z} + 6\,\mathrm{Im}(z) = -e^{11\pi i}$$

$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^2 + 2ixy - y^2 - 4i(x - iy) + 6y = -(-1)$$

$$x^2 + 2ixy - y^2 - 4ix - 4y + 6y = 1$$

$$\underbrace{x^2 - y^2 - 4y + 6y - 1}_{\text{PARTE REALE}} + i\underbrace{(2xy - 4x)}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ 2xy - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ x(y-2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y^2 + 2y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - \cancel{4} + \cancel{4} - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-1)^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Il luogo geometrico cercato è un insieme costituito da tre punti distinti.