Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 2 ottobre 2024

1. Scrivere in forma algebrica i numeri complessi

$$w_1 = \frac{7i}{2-i}, \qquad w_2 = \frac{(3-i)\left(\overline{-\frac{2}{3}i-1}\right)}{1+3i}, \qquad w_3 = i^{163}(1-i)^8.$$

   Individuare la parte reale e la parte immaginaria, e calcolare il modulo di ciascuno.

2. Scrivere in forma trigonometrica e in forma esponenziale i numeri complessi

$$w_1 = \frac{5}{6i}, \qquad w_2 = 5-5i, \qquad w_3 = -3^{3/2}-3i, \qquad w_4 = -\sqrt{7}+\sqrt{21}i, \qquad w_5 = -2e^{i\frac{\pi}{9}}.$$

3. Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Re}(z) \cdot (|z+1-i|-3) \geqslant 0$.

4. (Tema d'esame 7 settembre 2016) Determinare il luogo geometrico A dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} |z+2|^2 + \mathrm{Re}((z-i)^2) = 3 \\ \mathrm{Im}(z) \geqslant 0. \end{cases}$$

5. Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z+2\overline{z}| = 2$.

6. Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} (z+\overline{z})^2 + \left[i\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z-\overline{z}} + iz\right)\right]^2 + 1 = 0 \\ \mathrm{Im}(\overline{z}^2) < 0. \end{cases}$$

7. Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Im}\left(\dfrac{2}{z}\right) = 3$.

Scrivere in forma algebrica i numeri complessi

$$w_1 = \frac{7i}{2-i}, \qquad w_2 = \frac{(3-i)\left(-\frac{2}{3}i - 1\right)}{1+3i}, \qquad w_3 = i^{163}(1-i)^8.$$

Individuare la parte reale e la parte immaginaria, e calcolare il modulo di ciascuno.

$$w_1 = \frac{7i}{2-i} = \frac{7i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{7i(2+i)}{2^2+(-1)^2} =$$

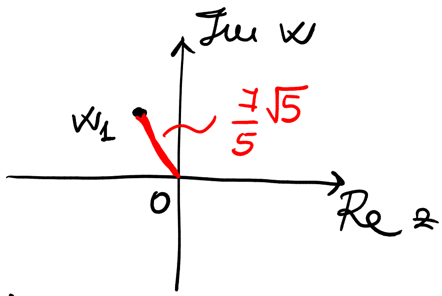
$$\boxed{z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}}$$

$$= \frac{14i + 7i^2}{5} \underset{\uparrow \atop i^2=-1}{=} -\frac{7}{5} + \frac{14}{5}i$$

$$\mathrm{Re}(w_1) = -\frac{7}{5}, \qquad \mathrm{Im}(w_1) = \frac{14}{5}$$

$$|w_1| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, w_1)^2 + (\mathrm{Im}\, w_1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2(1+2^2)} = \frac{7}{5}\sqrt{5}$$



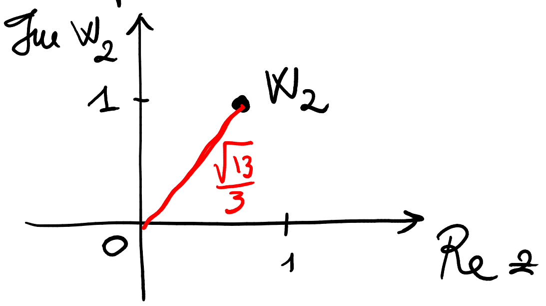
$$w_2 = \frac{(3-i)\overline{\left(-\frac{2}{3}i - 1\right)}}{1+3i} = \frac{(3-i)\left(\frac{2}{3}i - 1\right)}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} =$$

$$= \frac{\left(2i - 3 + \frac{2}{3} + i\right)(1-3i)}{1^2+3^2} = \frac{\left(3i - \frac{7}{3}\right)(1-3i)}{10} =$$

$$= \frac{3i + 9 - \frac{7}{3} + 7i}{10} = \frac{\frac{20}{3} + 10i}{10} = \frac{2}{3} + i$$

$$\mathrm{Re}(w_2) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{Im}(w_2) = 1$$

$$|w_2| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + 1} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$



$$w_3 = i^{163}(1-i)^8$$

<u>Osservazione</u> $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = -i \cdot i = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$, ...

$$i^{163} = i^{160} \cdot i^3 = (i^4)^{40} \cdot i^3 = 1^{40} \cdot (-i) = -i$$

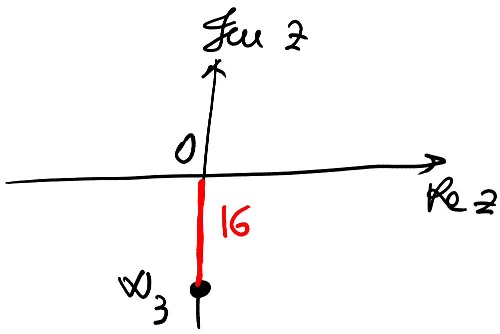
$$(1-i)^8 = \left[(1-i)^2\right]^4 = \left[1^2 - 2i + (-i)^2\right]^4 =$$

$$= \left[1 - 2i - 1\right]^4 = (-2i)^4 = (-2)^4 \cdot i^4 = 16$$

$$w_3 = i^{163} \cdot (1-i)^8 = -i \cdot 16 = -16i$$

$$\mathrm{Re}(w_3) = 0, \quad \mathrm{Im}(w_3) = -16$$

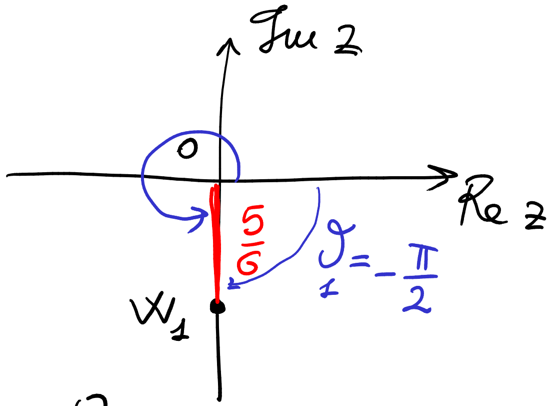
$$|w_3| = \sqrt{0^2 + (-16)^2} = 16$$



Scrivere in forma trigonometrica e in forma esponenziale i numeri complessi

$$w_1 = \frac{5}{6i}, \qquad w_2 = 5 - 5i, \qquad w_3 = -3^{3/2} - 3i, \qquad w_4 = -\sqrt{7} + \sqrt{21}i, \qquad w_5 = -2e^{i\frac{\pi}{9}}.$$

$$w_1 = \frac{5}{6i} = \frac{5}{6i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{5i}{-6} = -\frac{5}{6}i$$



$$\rho_1 = |w_1| = \frac{5}{6}$$

$$w_1 = \rho_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$$

$$\begin{cases} \cos \vartheta_1 = \dfrac{Re(w_1)}{\rho_1} \\ \sin \vartheta_1 = \dfrac{Im(w_1)}{\rho_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \vartheta_1 = 0 \\ \sin \vartheta_1 = -1 \end{cases}$$

$\vartheta_1 = -\frac{\pi}{2}$ va bene

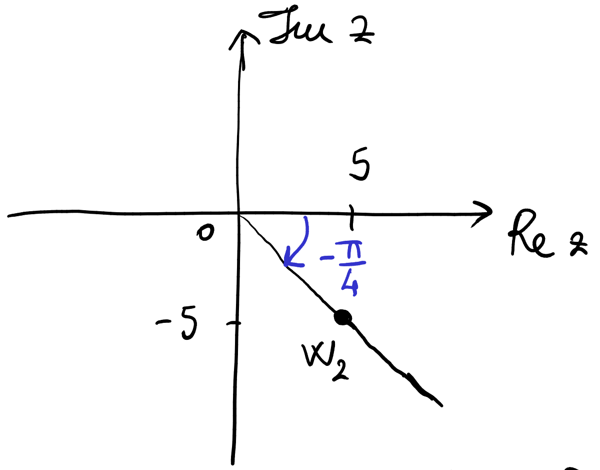
$$w_1 = \frac{5}{6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$ forma trigonometrica

$$\boxed{e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}}$$

$$w_1 = \frac{5}{6} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$ forma esponenziale

$w_2 = 5 - 5i$ $\qquad Re(w_2) = 5, \; Im(w_2) = -5$

$$\rho_2 = |w_2| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$



$$\begin{cases} \cos\vartheta_2 = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} \\ \sin\vartheta_2 = \dfrac{-5}{5\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\vartheta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\vartheta_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

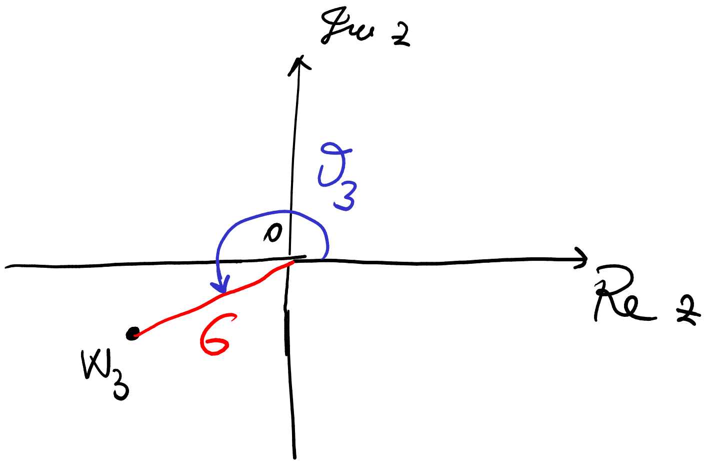
$\vartheta_2 = -\frac{\pi}{4}$ va bene

$w_2 = 5\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ forma esponenziale

$w_2 = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ forma trigonometrica

$$w_3 = -3^{3/2} - 3i \qquad \mathrm{Re}(w_3) = -3^{3/2}$$
$$\mathrm{Im}(w_3) = -3$$

$$\rho_3 = |w_3| = \sqrt{(-3^{3/2})^2 + (-3)^2} = \sqrt{3^3 + 3^2} = 6$$



$$\boxed{3^{3/2} = 3^{1+\frac{1}{2}} = 3 \cdot 3^{1/2} = 3\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta_3 = \dfrac{-3\sqrt{3}}{6} \\ \sin\vartheta_3 = -\dfrac{3}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\vartheta_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\vartheta_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\vartheta_3 = \frac{7}{6}\pi$ va bene

$$w_3 = 6\left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right)$$ forma trigonometrica

$$w_3 = 6e^{i\frac{7}{6}\pi}$$ forma esponenziale

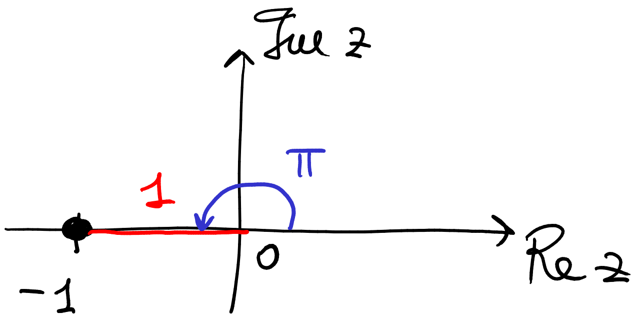
w_4 come esercizio

$$w_5 = -2e^{i\frac{\pi}{9}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} \\ |e^{i\vartheta}| = \sqrt{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = 1 \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} \end{array}}$$

$$w_5 = \left|-2e^{i\frac{\pi}{9}}\right| = |-2| \cdot \left|e^{i\frac{\pi}{9}}\right| = 2$$

Per scrivere w_5 in forma esponenziale, si tratta di scrivere -1 in forma esponenziale, perchè $w_5 = \underbrace{2}_{\text{modulo}} \cdot (-1) e^{i\frac{\pi}{9}}$



$$e^{i\pi} = -1$$

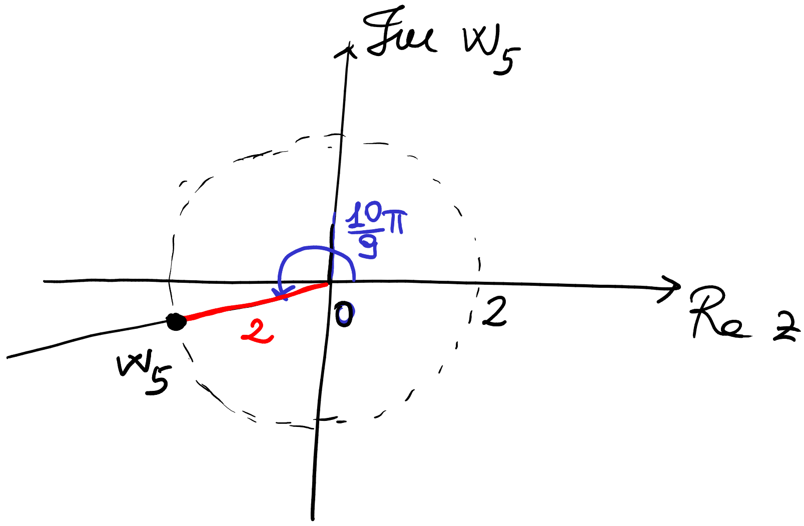
-1 ha modulo 1

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{-1}{1} & \leftarrow \text{Parte reale} \;/\; \leftarrow \text{Modulo} \\ \sin\vartheta = \dfrac{0}{1} & \leftarrow \text{Parte immaginaria} \;/\; \leftarrow \text{Modulo} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\vartheta = -1 \\ \sin\vartheta = 0 \end{cases} \quad \vartheta = \pi \text{ va bene}$$

$$w_5 = -2e^{i\frac{\pi}{9}} = 2 \cdot (-1) e^{i\frac{\pi}{9}} = 2 \cdot e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{9}} =$$

$$= 2 \cdot e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{9}\right)} = 2 \cdot e^{i\frac{10}{9}\pi} \quad \text{forma esponenziale}$$

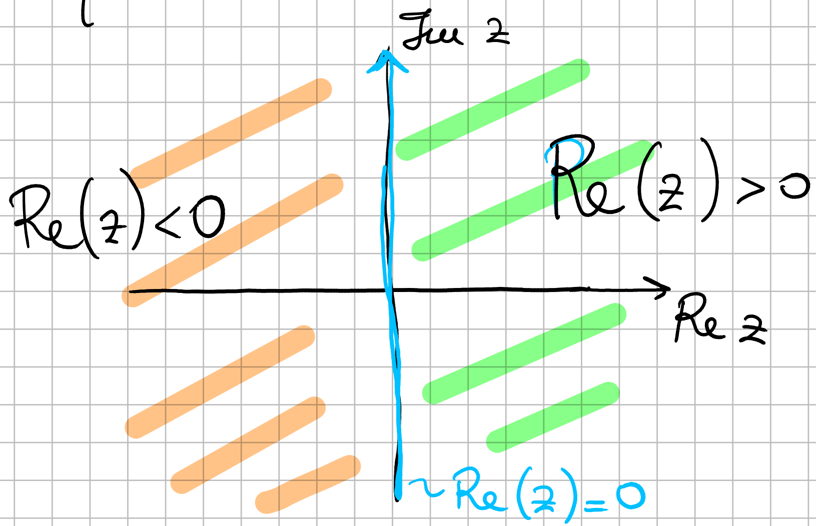
$$w_5 = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{10}{9}\pi\right) + i \sin\left(\frac{10}{9}\pi\right)\right)$$ forma trigonometrica



Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Re}(z) \cdot (|z+1-i|-3) \geq 0$

La disequazione è equivalente a

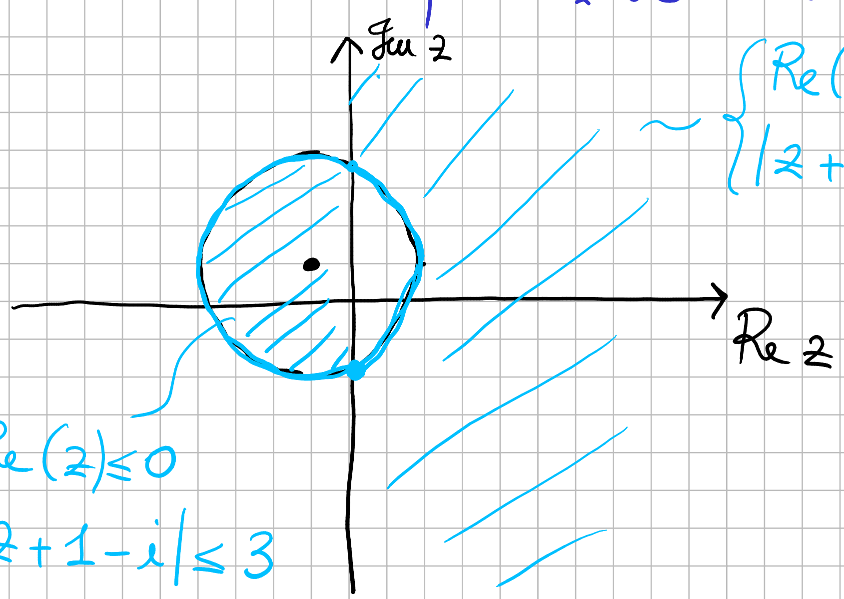
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) \geq 0 \\ |z+1-i|-3 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \operatorname{Re}(z) \leq 0 \\ |z+1-i|-3 \leq 0 \end{cases}$$



$$|z+1-i|-3=0$$

$$\underbrace{|z-(i-1)|}_{\text{Distanza del numero complesso } z \text{ da } i-1} = 3$$

L'equazione rappresenta la circonferenza con centro $i-1$ e raggio 3



$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) \geq 0 \\ |z+1-i| \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) \leq 0 \\ |z+1-i| \leq 3 \end{cases}$$

(Tema d'esame 07/09/2016)

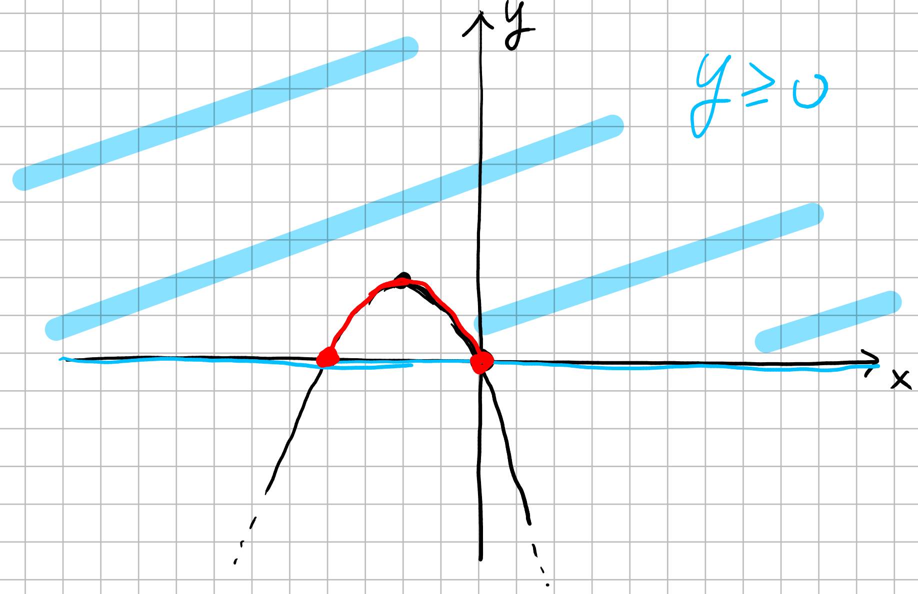
Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$\begin{cases} |z+2|^2 + Re((z-i)^2) = 3 \\ Im(z) \geq 0 \end{cases}$$

$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$|z+2|^2 + Re((z-i)^2) = 3$$
$$|x+iy+2|^2 + Re((x+iy-i)^2) = 3$$
$$|(x+2)+iy|^2 + Re((x+i(y-1))^2) = 3$$
$$(x+2)^2 + y^2 + Re(x^2 + 2ix(y-1) - (y-1)^2) = 3$$
$$x^2 + 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} + x^2 - \cancel{y^2} + 2y - \cancel{1} = \cancel{3}$$
$$2x^2 + 4x + 2y = 0$$
$$y = -x^2 - 2x$$

$\boxed{\text{Parabola con asse parallelo all'asse } y \quad y = ax^2 + bx + c, \text{ con } a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \quad \text{Vertice ha ascissa } -\frac{b}{2a}}$

$$Im(z) \geq 0$$
$$Im(x+iy) \geq 0$$
$$y \geq 0$$



$y = -x^2 - 2x$

$$\boxed{\begin{gathered} -x^2 - 2x = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \\ x(x+2) = 0 \\ x = 0 \vee x = -2 \end{gathered}}$$

Vertice $V(-1, 1)$

$y_V = -(-1)^2 - (-2) = 1$

Il luogo geometrico cercato è l'arco della parabola di equazione $y = -x^2 - 2x$ contenuto nel semipiano $y \geq 0$.

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z+2\bar{z}|=2$

$z = x+iy$, con $x,y \in \mathbb{R}$

$$|z+2\bar{z}|=2$$

$$|x+iy+2(x-iy)|=2$$

$$|3x-iy|=2$$

$$\sqrt{(3x)^2+(-y)^2}=2$$

$$\sqrt{9x^2+y^2}=2$$

$9x^2+y^2 \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$$9x^2+y^2=4$$

$$\frac{9}{4}x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{\frac{4}{9}}+\frac{y^2}{4}=1$$

Ellisse con centro di simmetria nell'origine e fuochi su uno degli assi cartesiani

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ con } a,b>0$$

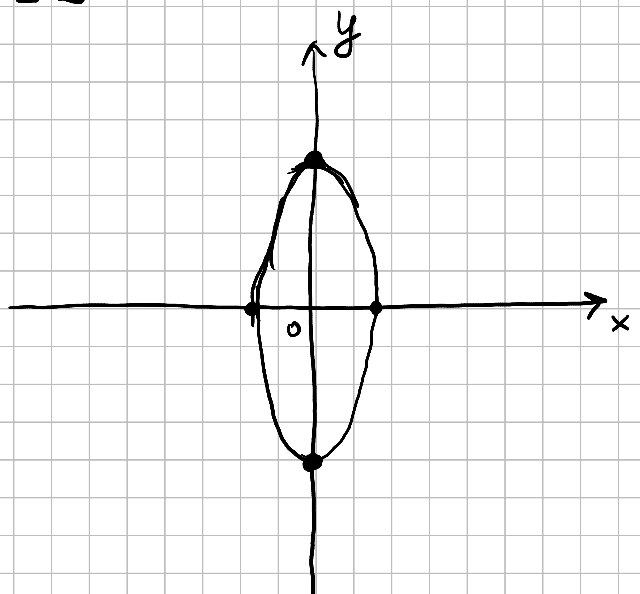
Se $a>b$, fuochi sull'asse x

Se $a<b$, fuochi sull'asse y

$a=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

Fuochi sull'asse y

$b=\sqrt{4}=2$



$$\begin{cases} x=0 \\ 9x^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 9x^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\pm\frac{2}{3} \end{cases}$$

Il luogo geometrico cercato è l'ellisse di equazione $9x^2+y^2=4$, che ha centro di simmetria nell'origine degli assi, fuochi sull'asse y e vertici $(2,0)$, $(-2,0)$, $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ e $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$.

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} (z+\bar{z})^2 + \left[i\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z-\bar{z}} + iz\right)\right]^2 + 1 = 0 \\ \mathrm{Im}\left(\bar{z}^2\right) < 0 \end{cases}$$

$z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$\bar{z} = x - iy$

$z+\bar{z} = x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy} = 2x$

$z-\bar{z} = \cancel{x} + iy - \cancel{x} + iy = 2iy$

$$(z+\bar{z})^2 + \left[i\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z-\bar{z}} + iz\right)\right]^2 + 1 = 0$$

$$(2x)^2 + \left[i\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2iy} + i(x+iy)\right)\right]^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 - \left[\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2iy}\cdot\frac{i}{i} + ix - y\right)\right]^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 - \left[\mathrm{Re}\left(\frac{i}{-2y} + ix - y\right)\right]^2 + 1 = 0$$

parte immaginaria

$$4x^2 - \left[\mathrm{Re}\left(\underbrace{-y}_{\text{parte reale}} + i\left(x - \frac{1}{2y}\right)\right)\right]^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 - (-y)^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 - y^2 = -1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{1} = -1$$

Fuochi sull'asse y

$a = \frac{1}{2}$, $b = 1$

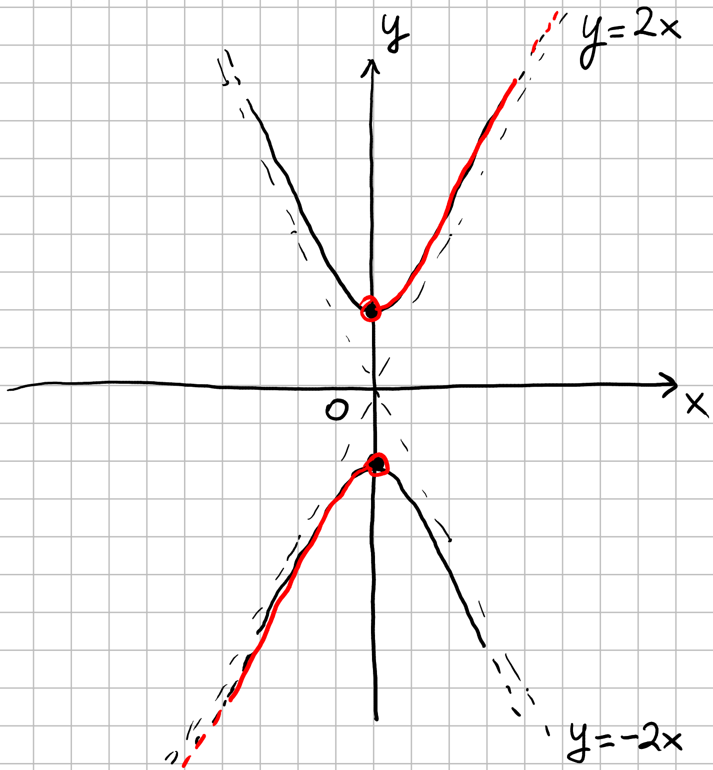
$y = 2x$ e $y = -2x$ asintoti

Iperbole con centro di simmetria nell'origine

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ $(a, b > 0)$

fuochi sull'asse x fuochi sull'asse y

$y = \pm \frac{b}{a} x$ asintoti



$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(\bar{z}^2) < 0$$

$$\operatorname{Im}((x - iy)^2) < 0$$

$$\operatorname{Im}(x^2 - 2ixy - y^2) < 0$$

$$\operatorname{Im}((x^2 - y^2) + i(-2xy)) < 0$$

$$-2xy < 0$$

$$xy > 0$$

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \leftarrow \text{I quadrante} \quad \vee \quad \begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases} \leftarrow \text{III quadrante}$$

$Im(\bar{z}^2)<0$ rappresenta l'unione del I e del III quadrante

Il luogo geometrico cercato è costituito dagli archi dell'iperbole di equazione $4x^2-y^2=-1$ contenuti nel I o nel III quadrante

Con il termine "quadrante" si intende esclusi gli assi cartesiani.

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Im}\left(\frac{2}{z}\right) = 3$

$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$z \neq 0$ è equivalente a $(x, y) \neq (0,0)$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2}{x+iy}\right) = 3$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy}\right) = 3$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2x - 2iy}{x^2 + y^2}\right) = 3$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2x}{x^2+y^2} + i\left(-\frac{2y}{x^2+y^2}\right)\right) = 3$$

$$-\frac{2y}{x^2+y^2} = 3$$

$$-2y = 3(x^2+y^2)$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y = 0$$

$$a = 0,\ b = \frac{2}{3},\ c = 0$$

Centro $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$

Raggio $r = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 0} = \frac{1}{3}$

Circonferenza in $\mathbb{R}^2$

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$

Centro $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

Raggio $r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

CONCLUSIONE NELL'ESERCITAZIONE DEL 03/10/2024