Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 26 settembre 2024

1. Si consideri la funzione $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|.$$
Riscrivere la funzione come funzione definita a tratti e tracciarne il grafico.

2. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di ognuno dei seguenti insiemi. Stabilire anche se ciascun insieme ammette massimo e se ammette minimo.

   (a) $A = \{\arcsin(1 - x) : x \in [1, 2)\}$

   (b) $B = \left\{\cos^2(x) : x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]\right\}$

   (c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} : \arctan x > \frac{\pi}{4}\right\}$

3. Verificare che
$$\log(x + e) = 1 + \log\left(1 + \frac{x}{e}\right),$$
dopo aver determinato per quali $x \in \mathbb{R}$ l'uguaglianza ha significato.

4. Dopo aver determinato per quali $x \in \mathbb{R}$ l'espressione seguente è definita, scriverla sotto forma di un unico logaritmo.
$$\log(1 + e^x) - x$$

5. In ciascuno dei seguenti esercizi è data una funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determinare il dominio della funzione f.

   (a) $f(x) = (\arcsin(9x^2 - 3))^{-1/3} + \sqrt[6]{\frac{\pi}{2} - \arccos x}$

   (b) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2\sin x) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}\cos x)}$

6. (Tema d'esame 8 luglio 2024) Si consideri la funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{2 + \sin x}}{\arctan(x - 4)} \log\left(\frac{1}{(x - 2)^2}\right).$$
Determinare il dominio di f e per quali $x \in \operatorname{dom}(f)$ si ha $f(x) \leqslant 0$.

Analisi Matematica 1 – Esercizi simili a quelli delle esercitazioni del 25 e 26 settembre

1. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = |x^2 - 3x + 2|.$$
Riscrivere la funzione come funzione definita a tratti e tracciarne il grafico.

2. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di ognuno dei seguenti insiemi. Stabilire anche se ciascun insieme ammette massimo e se ammette minimo.

   (a) $A = \{(|x| + 1)^{-\sqrt{2}} : x \in \mathbb{R}\}$

   (b) $B = \{2x - x^2 + 8 : x \in [0, 4)\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{\frac{x}{3} - 3} > 0\right\}$

   (c) $C = \left\{\sin^2(x) : \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi\right\}$

3. In ciascuno dei seguenti esercizi è data una funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determinare il dominio della funzione f.

   (a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{(1+x)\log(3-x)} & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{5} - 2} & \text{se } -3 \leqslant x < 0 \\ \sqrt{\dfrac{|3-2x| + 1}{|x^2 - 3| - 2}} & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

   (b) $$f(x) = \frac{x^4}{[x]} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2}(\sqrt{x-1} + x - 3)^{-\frac{1}{4}}$$

   (c) $$f(x) = (x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x})^{\log(e-x)}$$

4. (Tema d'esame 20 giugno 2024) Si consideri la funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+|x|}}\right) - \sqrt{5x-1} + (\log^2(x) - 2\log(x))^{-\sqrt{5}}.$$
Determinare il dominio di f.

5. Si consideri la funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{3 - 4\cos^2 x}}$.
Determinare il dominio di f, stabilire se la funzione sia pari o dispari, verificare che la funzione è periodica e ha periodo minimo π.

Per qualunque richiesta di chiarimento potete scrivere a paolo.scarpat@unibs.it.

Si consideri la funzione $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| .$$

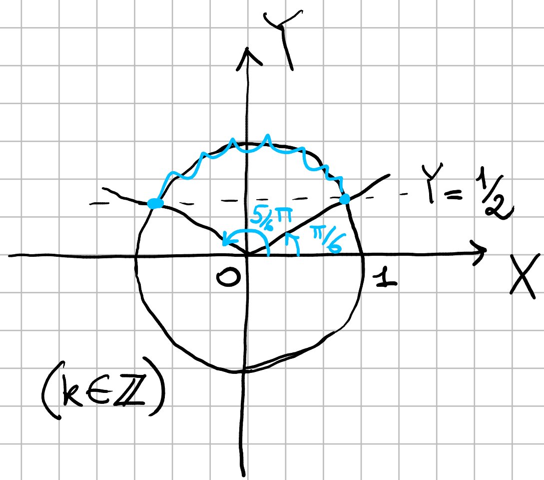
Riscrivere la funzione come funzione definita a tratti e tracciarne il grafico.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

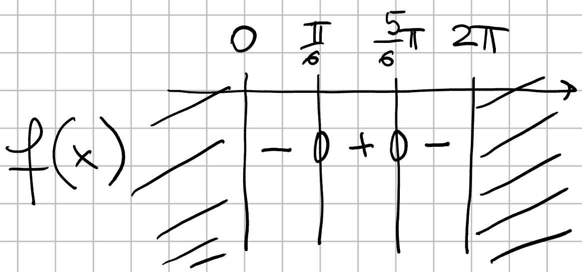
$$\left| \sin x - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} \sin x - \frac{1}{2} & \text{se } \sin x - \frac{1}{2} \geq 0 \\ \frac{1}{2} - \sin x & \text{se } \sin x - \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\sin x - \frac{1}{2} \geq 0$$

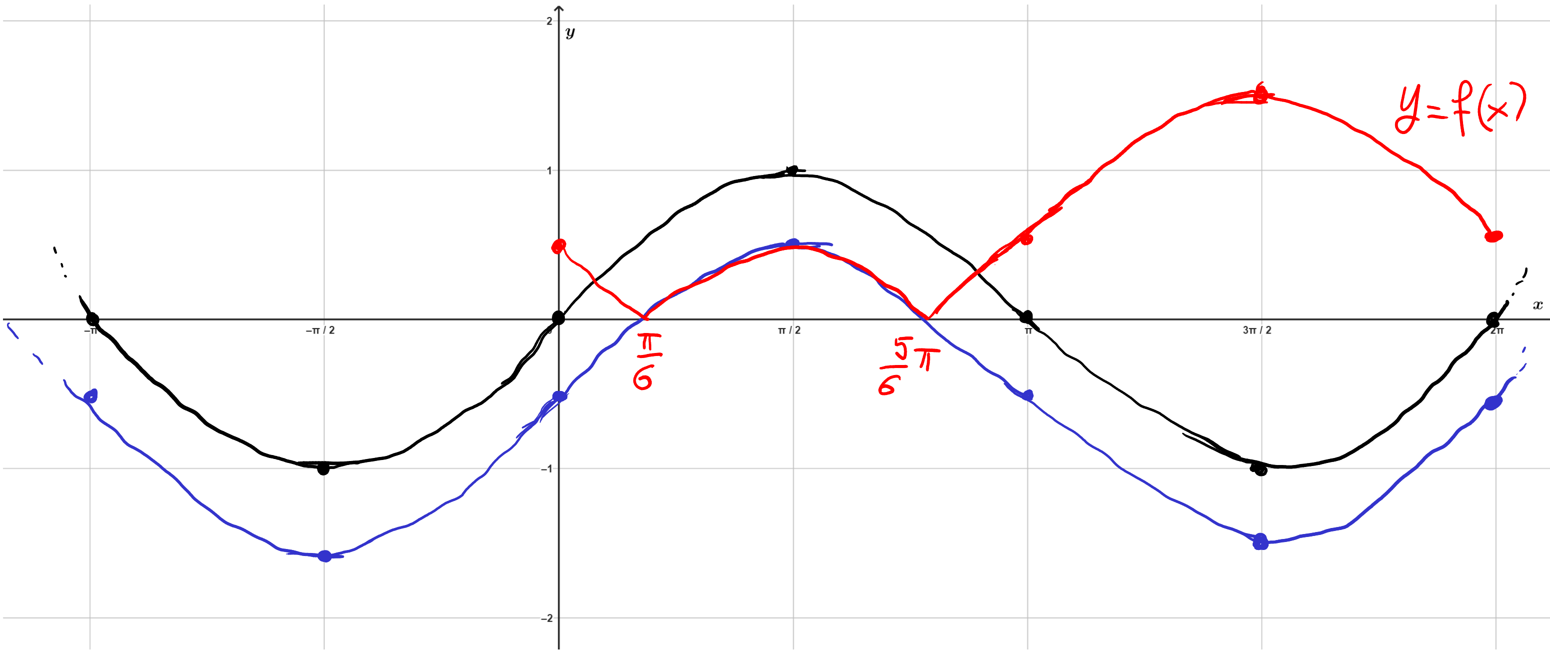
$$\sin x \geq \frac{1}{2}$$



$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \frac{1}{2} & \text{se } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \\ \frac{1}{2} - \sin x & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{5}{6}\pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$



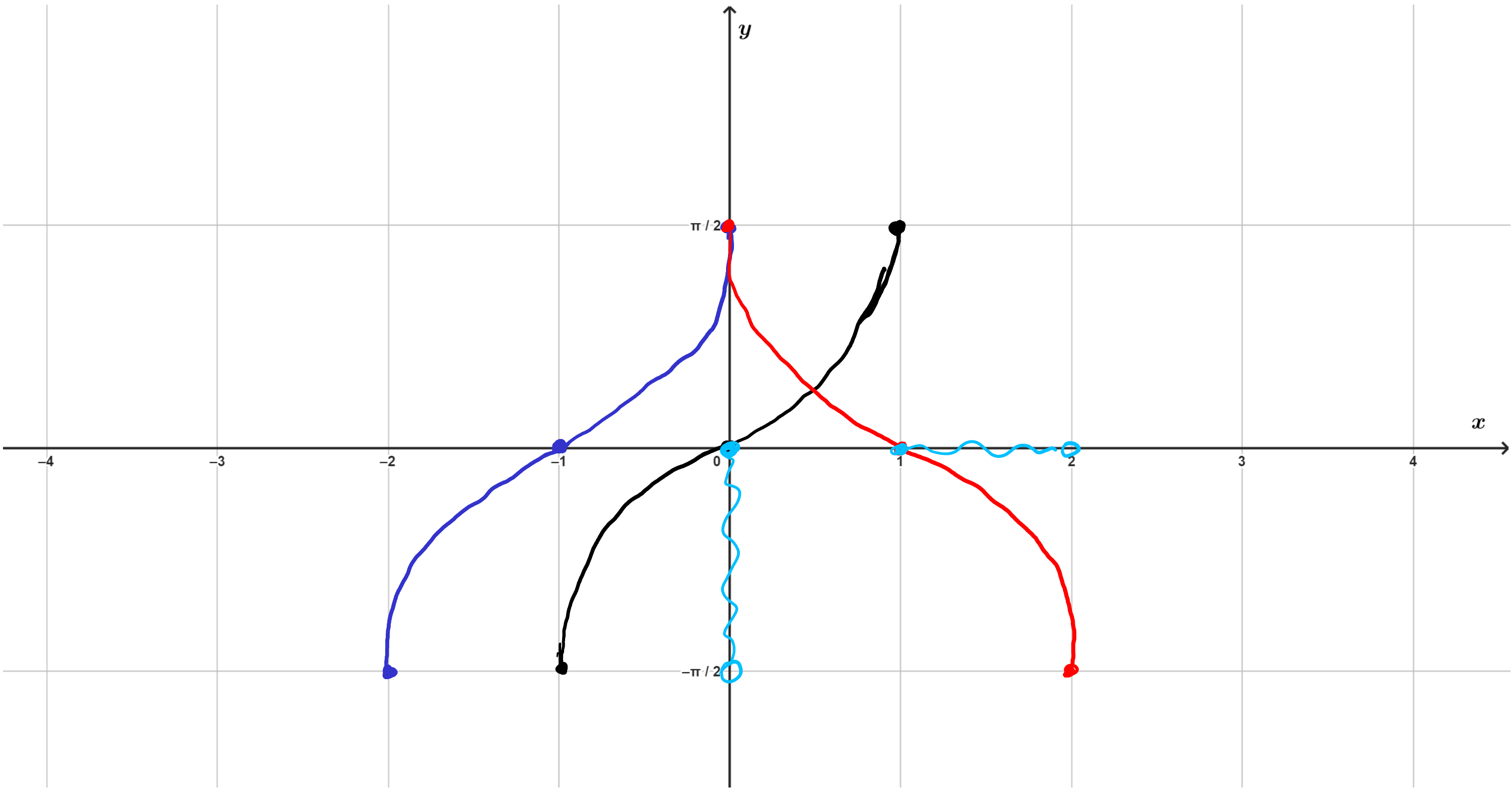
$x \longmapsto \sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin x - \frac{1}{2}\,, \quad x \in \mathbb{R}$

$x \longmapsto \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|, \quad x \in [0, 2\pi]$

$A = \{ \arcsin(1-x) : x \in [1,2) \} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$x \longmapsto \arcsin x$

$x \longmapsto \arcsin(1+x)$

$x \longmapsto \arcsin(1-x)$

$\sup A = 0 = \max A$

$\inf A = -\frac{\pi}{2}$; A non ammette minimo perchè $-\frac{\pi}{2} \notin A$

Formule di duplicazione per seno e coseno

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Riscriviamo la seconda formula in due modi diversi

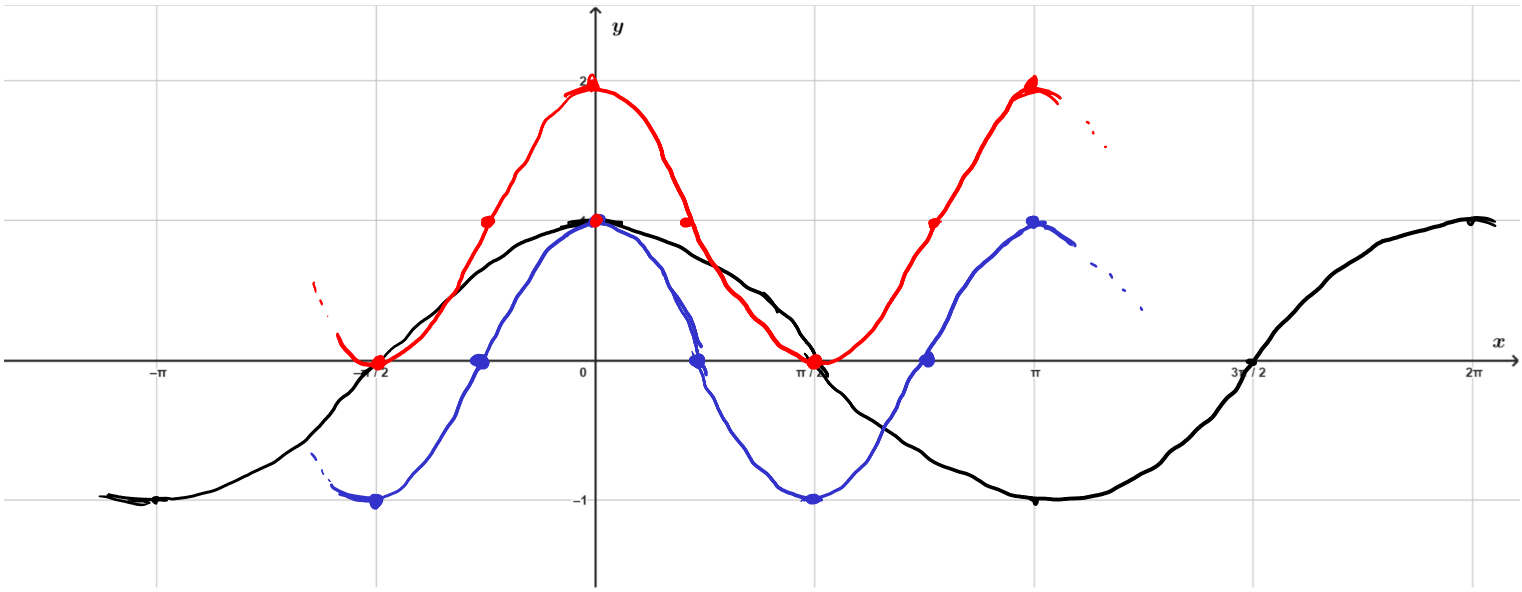
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

Quindi

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \quad e \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

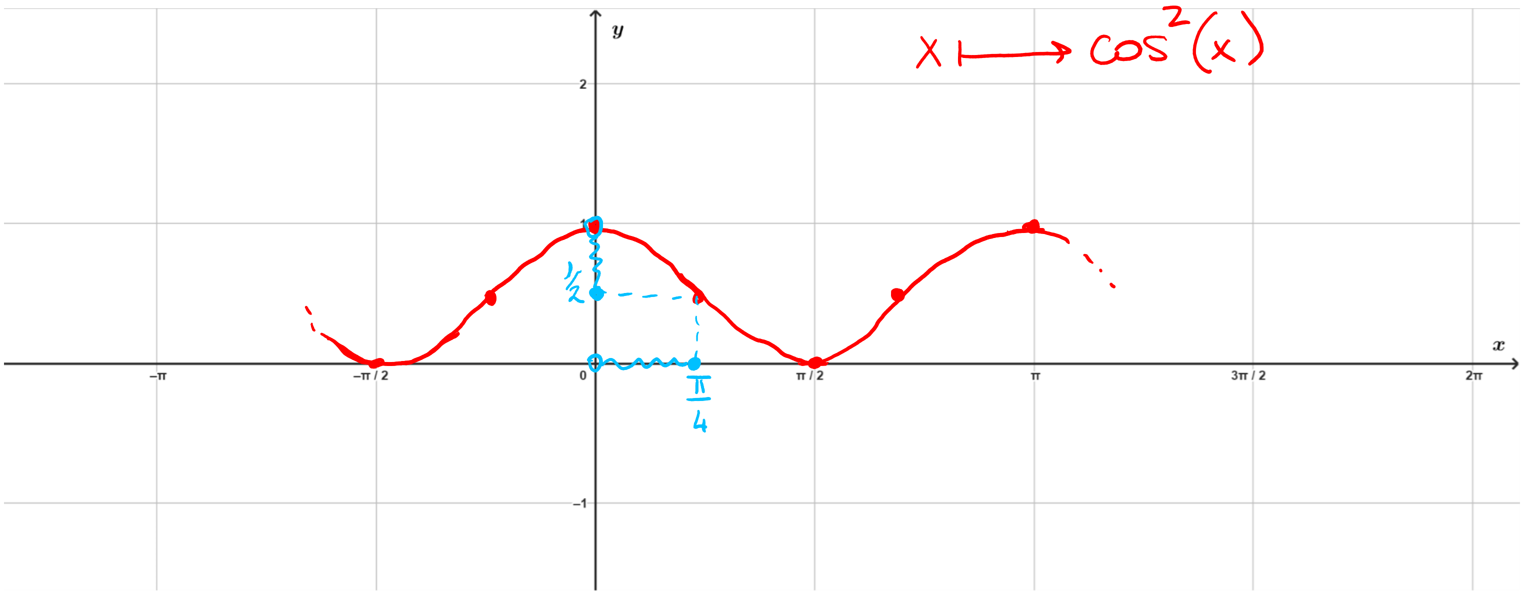
$B = \left\{ \cos^2(x) : x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right] \right\} = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$



$x \longmapsto \cos x$

$x \longmapsto \cos 2x$ $\qquad x \longmapsto f(x)$

$x \longmapsto 1 + \cos 2x$ $\qquad x \longmapsto 1 + f(x)$

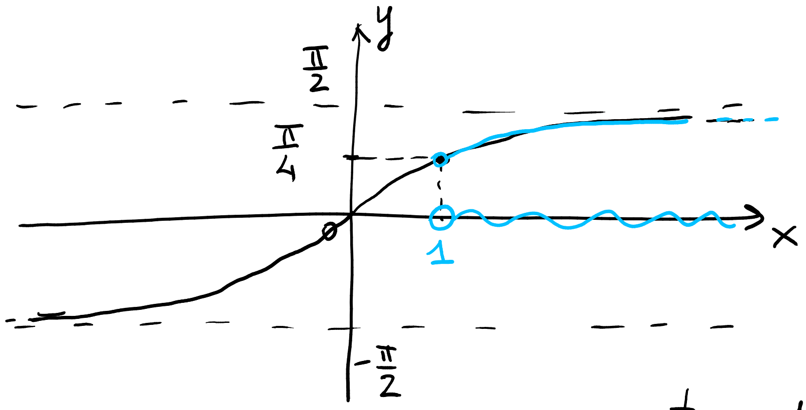


$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Dato un grafico $y = f(x)$, il grafico di $y = f(x-a) + b$ si ottiene dal grafico dato mediante una traslazione di vettore (a, b) — b unità lungo l'asse y

a unità lungo l'asse x

$C = \{ x \in \mathbb{R} : \arctan x > \frac{\pi}{4} \} = (1, +\infty)$



$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ perchè

$\tan \frac{\pi}{4} = 1$ e $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\arctan x > \frac{\pi}{4}$

$x > 1$

$\inf C = 1$ e C non ammette minimo perchè $1 \notin C$

$\sup C = +\infty$ e C non ammette massimo.

(8 luglio 2024)

$$f : \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{2+\sin x}}{\arctan(x-4)} \log\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)$$

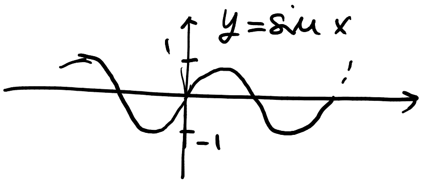
- Determinare $\mathrm{dom}(f)$
- Determinare per quali $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(x) \leq 0$.

$$\begin{cases} 2+\sin x \geq 0 & \text{(perchè la radice quarta sia definita)} \\ \arctan(x-4) \neq 0 & \text{(perchè il quoziente sia definito)} \\ \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0 & \text{(perchè il logaritmo sia definito)} \\ (x-2)^2 \neq 0 & \text{(perchè il quoziente come argomento del logaritmo sia definito)} \end{cases}$$

$2+\sin x \geq 0$

$\sin x \geq -2$

$\forall x \in \mathbb{R}$

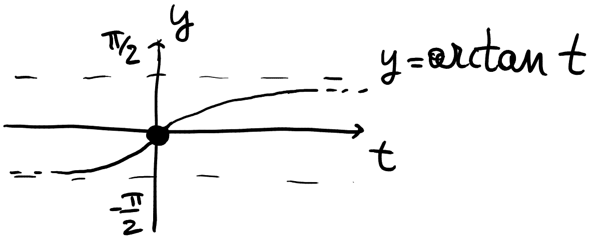


L'ins. immagine della funzione seno è $[-1,1]$

$\arctan(x-4) \neq 0$

$x-4 \neq 0$

$x \neq 4$



$(x-2)^2 \neq 0 \iff x-2 \neq 0 \iff x \neq 2$

numeratore positivo

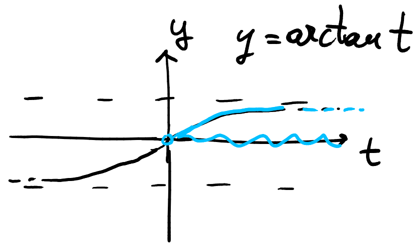
$$\frac{1}{(x-2)^2} > 0 \iff (x-2)^2 > 0 \iff x \neq 2$$

$$\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

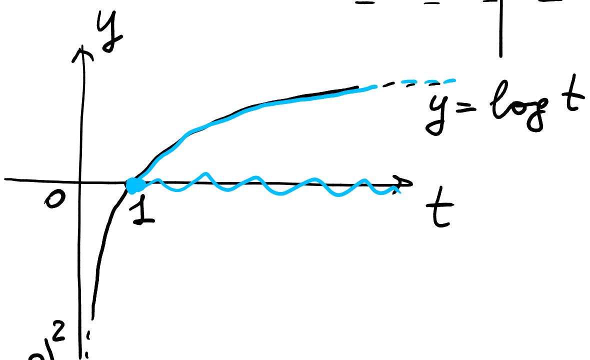
$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2,4\}$$

$$\sqrt[4]{2+\sin x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom}(f)$$

$$\arctan(x-4) > 0 \iff x-4>0 \iff x>4$$



$$\log\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right) \geq 0$$



$$\frac{1}{(x-2)^2} \geq 1$$

perché $(x-2)^2 > 0$ se $x \in \mathrm{dom}(f)$

$$1 \geq (x-2)^2 \wedge x \neq 2$$

$$(x-2)^2 \leq 1 \wedge x \neq 2$$

$$-1 \leq x-2 \leq 1 \wedge x \neq 2$$

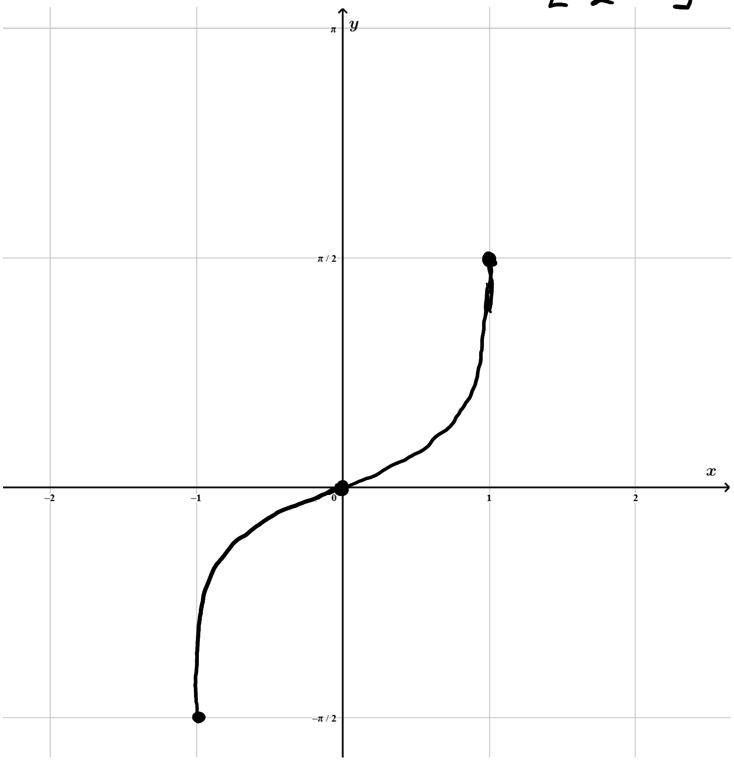
$$1 \leq x \leq 3 \wedge x \neq 2$$

		1		2		3		4	
$\sqrt[4]{2+\sin x}$	+		+		+		+		+
$\arctan(x-4)$	−		−		−		−		+
$\log\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)$	−	0	+		+	0	−		−
$f(x)$	+	0	−		−	0	+		−

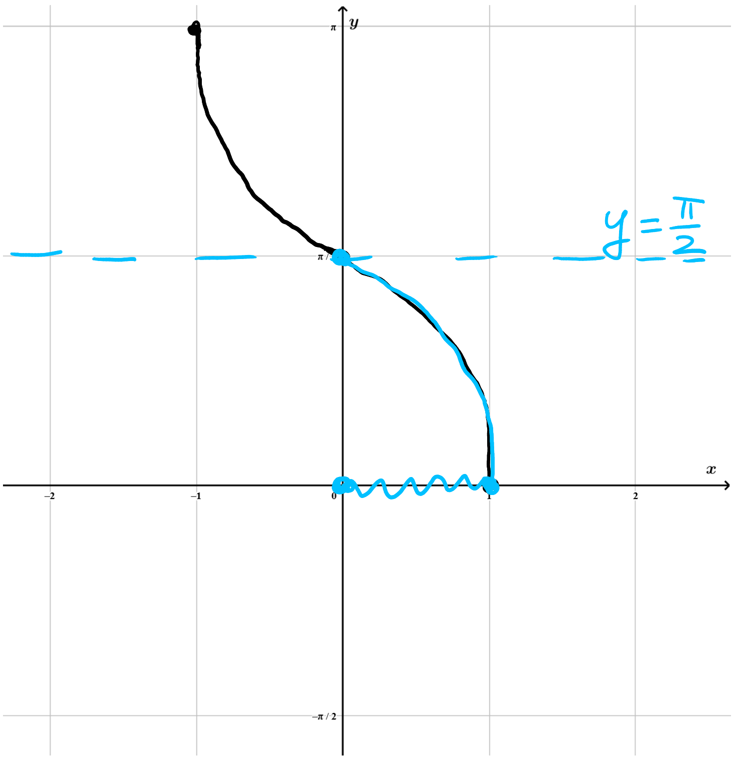
$$f(x) \leq 0 \iff x \in [1,2) \cup (2,3] \cup (4,+\infty)$$

Determinare il dominio della funzione f definita da $f(x) = \left(\arcsin(9x^2-3)\right)^{-1/3} + \sqrt[6]{\frac{\pi}{2} - \arccos x}$.

$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$



$$\left(\arcsin(9x^2-3)\right)^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{\arcsin(9x^2-3)}}$$

$$\begin{cases} -1 \le 9x^2-3 \le 1 \\ \arcsin(9x^2-3) \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x \ge 0 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

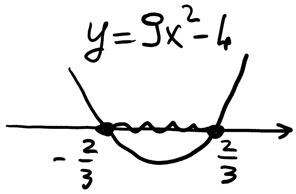
$\arcsin(9x^2-3) \neq 0 \Rightarrow 9x^2-3 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

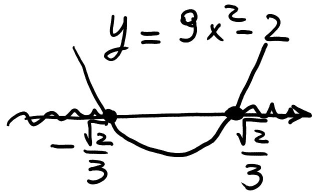
$\frac{\pi}{2} - \arccos x \ge 0 \Rightarrow \arccos x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le x \le 1$

$$-1 \leq 9x^2-3 \leq 1 \quad \text{è equivalente a}$$

$$\begin{cases} 9x^2-3 \leq 1 \\ 9x^2-3 \geq -1 \end{cases}$$

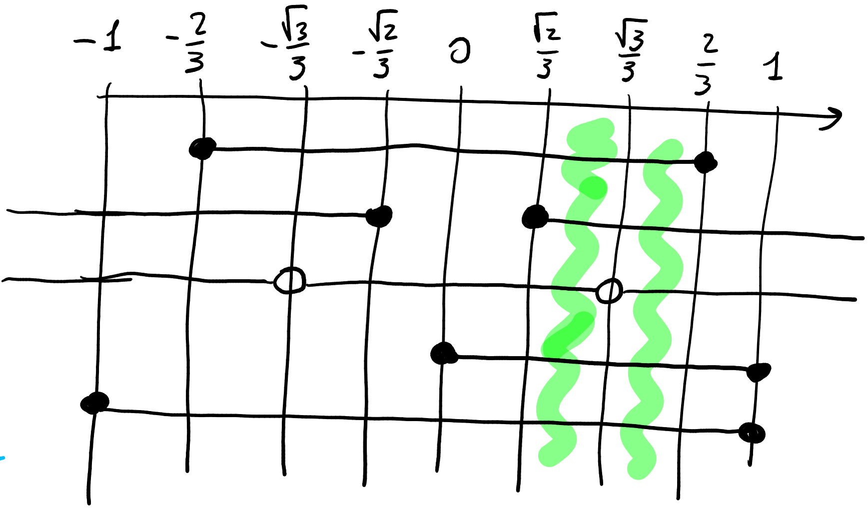
$$\begin{cases} 9x^2-4 \leq 0 \\ 9x^2-2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{3} \vee x \geq \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$





$$\begin{cases} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{3} \vee x \geq \frac{\sqrt{2}}{3} \\ x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(è sufficiente richiedere $0 \leq x \leq 1$)



$$\mathrm{dom}(f) = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

$$\log(A\cdot B) = \log A + \log B \quad \forall A, B \in (0,+\infty)$$

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B \quad \forall A, B \in (0,+\infty)$$

$$\log A^x = x\cdot \log A \qquad \forall A \in (0,+\infty)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Riguardando l'esercizio precedente,

$$\log\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right) = \underbrace{\log 1}_{=0} - \log(x-2)^2 = -\log(x-2)^2 =$$

$$= -\log|x-2|^2 = -2\log|x-2|$$

Uguaglianza valida $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$(x-2)^2 = |x-2|^2$

Verificare l'uguaglianza $\log(x+e) = 1 + \log\left(1+\frac{x}{e}\right)$

L'uguaglianza ha significato se e solo se

$$\begin{cases} x+e>0 \\ 1+\frac{x}{e}>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-e \\ \frac{x}{e}>-1 \end{cases} \iff x>-e$$

$$\log(x+e) = \log\left(e\left(\frac{x}{e}+1\right)\right) = \log e + \log\left(1+\frac{x}{e}\right) =$$

$$= 1 + \log\left(1+\frac{x}{e}\right) \qquad \forall x \in (-e,+\infty)$$

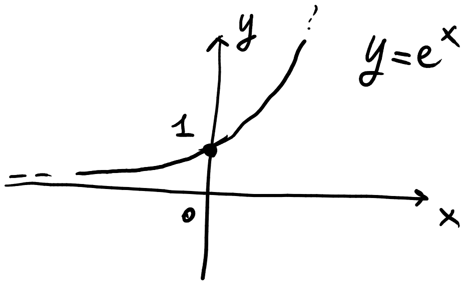
Scrivere sotto forma di un unico logaritmo

$\log(1+e^x)-x$

L'espressione ha significato se e solo se

$1+e^x>0$

$e^x > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$



$1+e^x>0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\log(1+e^x)-x = \log(1+e^x)-\log(e^x) =$$

$$= \log\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{1}{e^x}+\frac{e^x}{e^x}\right) =$$

$$= \log(1+e^{-x}) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

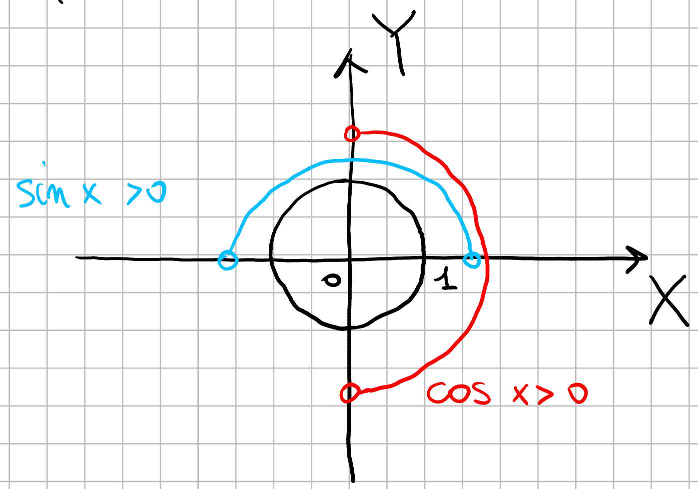
Determinare il dominio della funzione f definita da

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2\sin x) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}\cos x)}$$

$$\begin{cases} 2\sin x > 0 \\ \sqrt{2}\cos x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(2\sin x) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}\cos x) \geq 0 \end{cases}$$

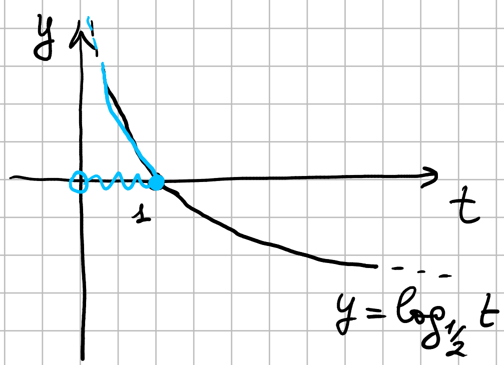
$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}\cdot 2\sin x\cos x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}\sin 2x) \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \iff 0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

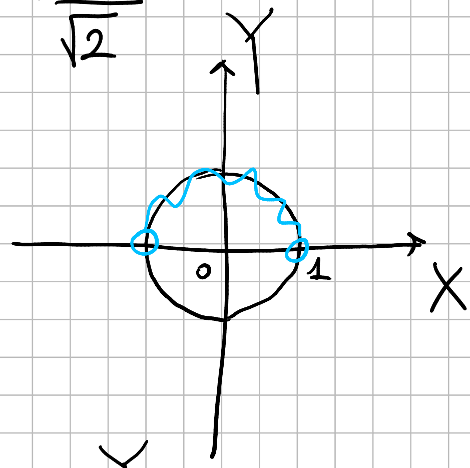
$(k \in \mathbb{Z})$



$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}\cdot\sin 2x) \geq 0$$

$$0 < \sqrt{2}\cdot\sin 2x \leq 1$$

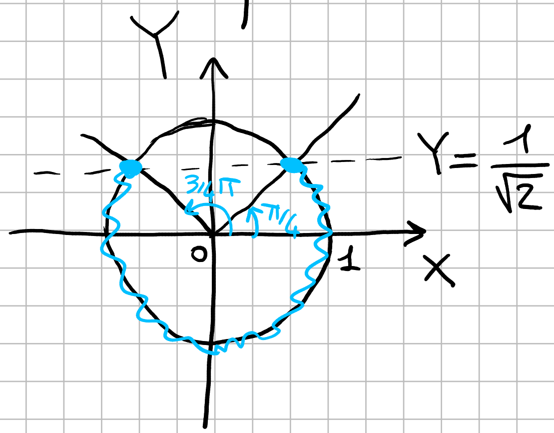
$$\begin{cases} \sqrt{2}\cdot\sin 2x > 0 \\ \sqrt{2}\cdot\sin 2x \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin 2x > 0 \\ \sin 2x \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



$$\sin 2x > 0$$

$$0 + 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi$$

$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

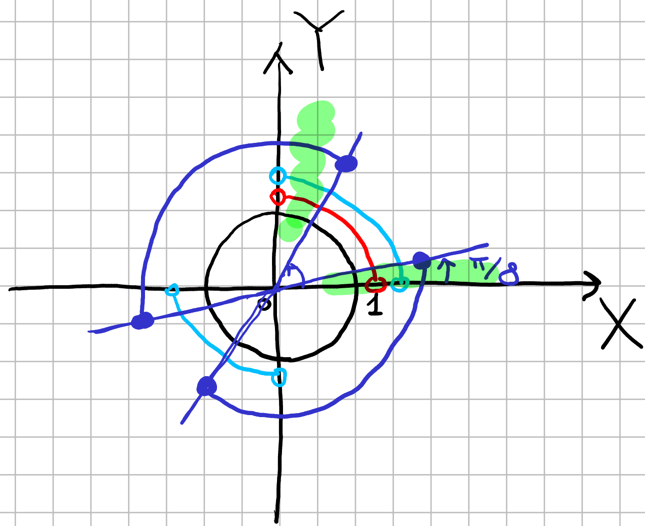


$$\sin 2x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \le 2x \le \frac{9}{4}\pi + 2k\pi$$

$$\frac{3}{8}\pi + k\pi \le x \le \frac{9}{8}\pi + k\pi$$

$$\begin{cases} 0 + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \dfrac{3}{8}\pi + k\pi \le x \le \dfrac{9}{8}\pi + k\pi \end{cases}$$



$$\mathrm{dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2k\pi < x \le \frac{\pi}{8} + 2k\pi \ \vee\ \frac{3}{8}\pi + 2k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$