

Dato a_k succ

? $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$

$$S_n = \sum_{k=k_0}^n a_k \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} S \in \mathbb{R} & \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ converge} \\ \infty & \Rightarrow \sum a_k \text{ diverge} \\ \nexists & \Rightarrow \sum a_k \text{ indeterminato} \end{cases}$$

- serie Telescopiche $a_k = b_{k+1} - b_k$ con b_k un'altra succ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} - b_{k_0}$$

- serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indeterm.} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$

- criterio di linearità $\sum_{k=k_0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ES $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k - 1}{4^k} \quad a_k = \frac{2^k - 1}{4^k} = \frac{2^k}{4^k} - \frac{1}{4^k} = \left(\frac{2}{4}\right)^k - \frac{1}{4^k} =$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{succ geom}} - \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^k}_{\text{succ geom}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k - 1}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{4}\right)^k \right] \xleftarrow{\text{linearità}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k =$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$|q| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

é convergente e la somma vale $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$q = \frac{1}{4}$ $|q| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ é convergente e la sua somma é

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$= 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

ES $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

considero $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

$$k(k+1) \geq k^2$$

$$\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k(k+1)}$$

sono entrambe a f. positive

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{converge}}$$

non posso
concludere
nulla

• $\sum_{k=0}^{\infty} k^2$

$$a_k = k^2$$

$$a_k = k^2$$

$$b_k = k$$

ho visto che $\sum_{k=0}^{\infty} k$ diverge
 $\parallel$
 b_k

$$k \leq k^2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \leq \sum_{k=0}^{\infty} k^2$$

$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k}_{\text{diverge (già dim)}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k^2}_{\text{diverge}}$
 $\uparrow$
criterio confronto

$$\bullet \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

confronto con $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

$$(k+1)^2 \geq k(k+1)$$

non entrambi t.p.

$$\frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)^2}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

serie di
terugoli
conv

$\Rightarrow$ convergente

prima o vero

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{conv}}$$

$\downarrow$? $\Leftarrow$

potrebbe essere finita o infinita

• $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{a_k > 0}$, considero $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{b_k > 0}$ serie a t.p.

? $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in (0, +\infty)$ cioè $a_k \sim \ell b_k$ per $k \rightarrow \infty$

$$\text{Sì } \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k^2 + k} \sim \frac{1}{k^2}$$

$\frac{1}{k^2}$ e $\frac{1}{k(k+1)}$ hanno stesso comp. asint. per $k \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ per il criterio del comp. asintotico ho

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

converge $\Leftarrow$ converge (già dimostrato)

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$

$$\underbrace{\frac{1}{(k+1)^2}}_{>0} = \frac{1}{k^2 + 2k + 1} \sim \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{>0} \quad \text{per } k \rightarrow \infty \quad \text{t.p.}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

converge $\Leftarrow$ ho detto che conv.

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

considero $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

$$a_k = \frac{1}{k} > 0 \quad b_k = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

quando $k \geq 1$ $\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) > 0$ ho $a_k, b_k > 0$

$$\frac{1}{k} \sim \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad \text{quando } k \rightarrow \infty$$

$$\left(x \sim \log(1+x) \quad \text{quando } x \rightarrow 0 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

diverge $\Leftarrow$ avremmo dim che era div

|| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serie armonica divergente

anche se il t. generale $a_k = \frac{1}{k}$ è infinitesimo per $k \rightarrow \infty$

$$\bullet \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{3k^2+1}$$

$$a_k = \frac{2k}{3k^2+1} \geq 0$$

$$? b_k : a_k \sim b_k \text{ per } k \rightarrow \infty$$



t.c. $\sum b_k$ è già studiata

$$\sim \frac{2k}{3k^2} = \frac{2}{3k} = b_k$$

$$\frac{2k}{3k^2+1} \sim \frac{2}{3k} \quad \text{per } k \rightarrow \infty$$

$k \neq 0$, allora studio

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3k^2+1} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k}$$

cambiato il valore
finito della somma
ma non il comportamento

$$\parallel \quad \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \leftarrow \text{linearit\`e}$$

diverge $\Leftarrow$ serie armonica diverg
 $\uparrow$
crit. conf as.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

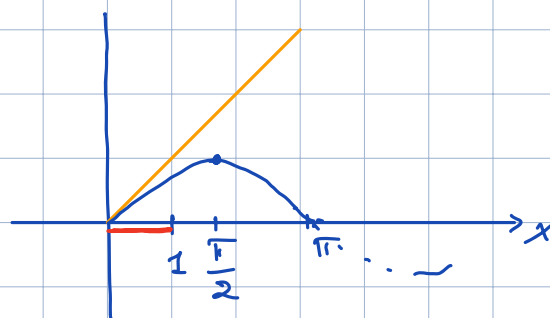
$$a_k = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k \geq 1$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$$

la serie è a t.p.

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) > 0 \\ &\forall k \geq 1 \end{aligned}$$



$$\text{se } 0 < x \leq 1$$

$$\Rightarrow \sin x > 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\text{quando } x \rightarrow 0 \quad \sin x \sim x$$

$$\text{quando } k \rightarrow \infty \quad \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{k}} > 0$$

← criterio del confronto asint.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$$

diverge

← diverg

↑
criterio
confronto asintotico

serie armonica
generalizzata
con $\lambda = \frac{1}{2} < 1$
divergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

$$a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$$

$$b_k = \frac{1}{k}$$

Voglio vedere se le ip del criterio di Leibniz sono soddisfatte

0) $b_k > 0 \quad \frac{1}{k} > 0 \quad \text{vero } \forall k \geq 1$

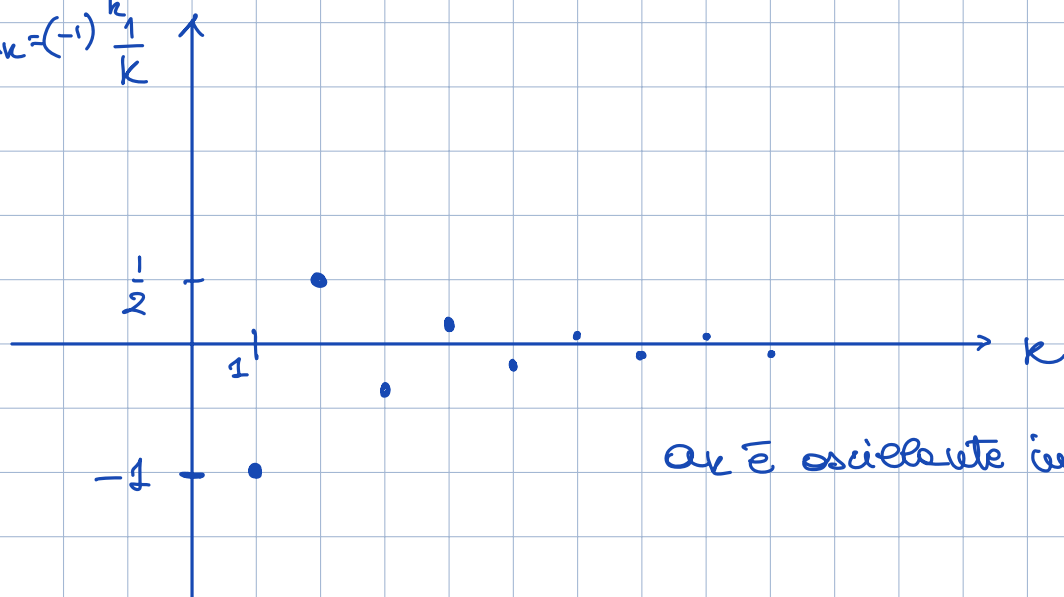
1) $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0 \quad \text{vero} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$

2) b_k decrescente vero perché $\frac{1}{k}$ è decrescente

sono soddisfatte le ip del criterio di Leibniz $\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ converge}$$

$$a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$$



a_k è oscillante in finitezza

Es: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$

$$a_n = \frac{e^n}{n!} > 0 \quad \forall n \geq 0$$

serie a t. positivi

criterio rapporto $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\cancel{(n+1)!}^{n+1}} \cdot \frac{\cancel{n!}^{n!}}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+1} = 0$$

$(n+1)! = (n+1)n!$

$\Rightarrow l = 0 < 1 \Rightarrow \sum \frac{e^n}{n!}$ è convergente

↑
criterio del rapp.

• $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$

$$a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\overset{n \cdot n}{n^2}} = \left[1 - \frac{2}{n}\right]^n \overset{n}{\geq 0} \quad \forall n \geq 2$$

criterio radice $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left[1 - \frac{2}{n}\right]^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = e^{-2} < 1$$

per il criterio della radice la serie data converge.