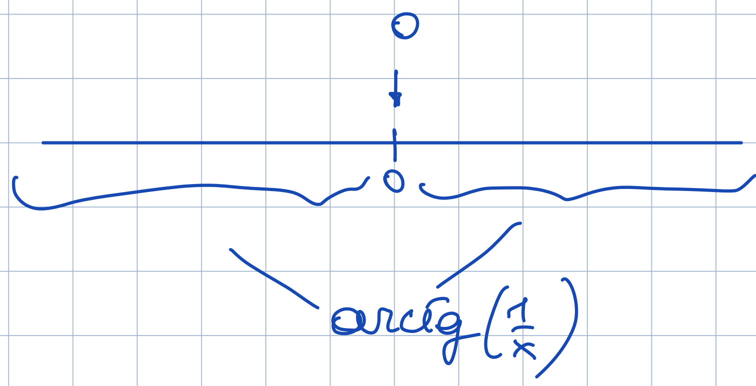
$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$



- simmetrie

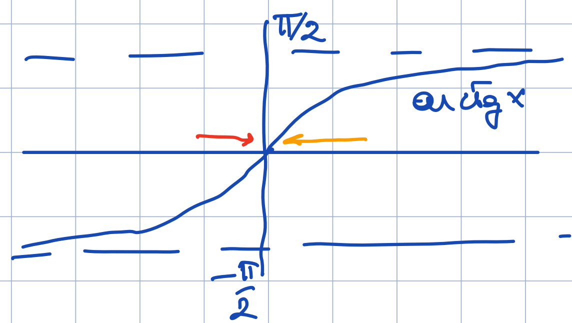
$$f(-x) = \arctan\left(\frac{1}{-x}\right) =$$

$$= -\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{perché arctg è dispari}$$

$$= -f(x)$$

$f(-x) = -f(x)$, f è dispari

- limiti agli estremi e asintoti



$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0^{\mp}$$

$\frac{1}{x} \to 0^{\mp}$

$y = 0$ è as. orizz completo,

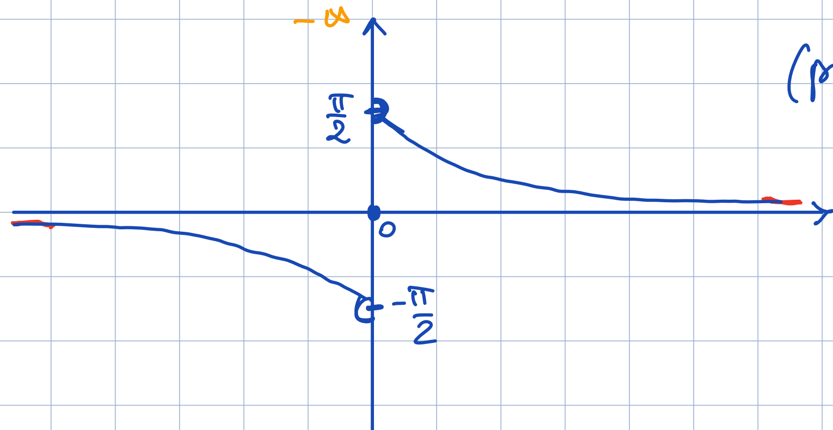
? $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$\frac{1}{x} \to +\infty$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$\frac{1}{x} \to -\infty$

$x = 0$ pto di salto per f (punto di discontinuità)



$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1+x^2} & x \neq 0 \\ \nexists \text{ perché } f \text{ è disc in } x=0 & x=0 \end{cases} \quad ?$$

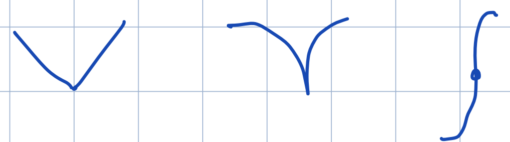
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

$$\left(D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} \,; \quad D\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \right.$$

$$(g(f))'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$= \frac{1}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

dom $(f') =$ dom $(f) \setminus \{0\}$



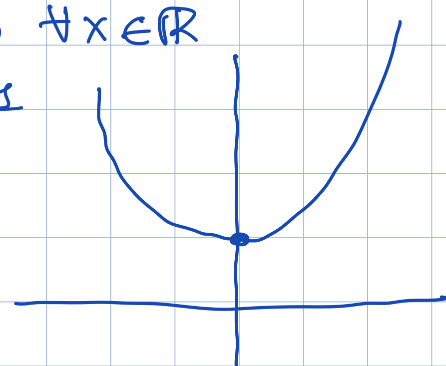
? $f'(x)=0$ pti stazionari

$f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2} = 0$ mai $\Rightarrow \nexists$ pti staz

• ? $f'(x) \geq 0$ $\quad -\dfrac{1}{1+x^2} \geq 0$

$D = 1+x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$N = -1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad \Rightarrow 1+x^2 \geq 1$



		0	
N	$-$		$-$
D	$+$		$+$
f'	$-$		$-$
f	$\searrow$		$\searrow$

$$f''(x) = -\frac{\cancel{0\cdot(1+x^2)} - 1\cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ solo per $x \neq 0$

$$= \frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad , \text{ per } x \neq 0$$

$$\left(\frac{N}{D}\right)' = \frac{N' \cdot D - N \cdot D'}{D^2}$$

$$\left(f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I \iff f \text{ convessa in } I \right)$$

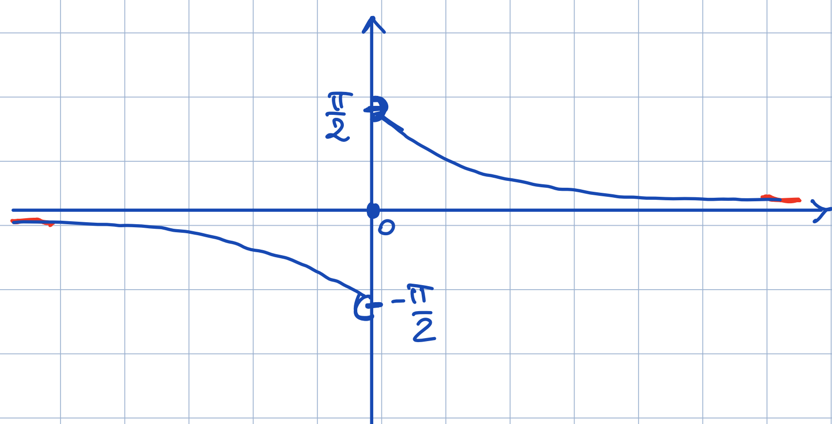
$f''(x) \geq 0 \qquad \frac{2x}{(1+x^2)^2} \geq 0$

$N = 2x \geq 0 \iff x \geq 0$

$D = (1+x^2)^2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

		0	
N	$-$		$+$
D	$+$		$+$
f''	$-$		$+$
f	$\cap$		$\cup$

Attenzione $x=0$ non è pto di flesso perché in $x=0$ f è disc $\Rightarrow \nexists f'(0)$, $\nexists f''(0)$



Pur essendo limitata, la f non ammette max e min (rel o assoluti).

f è decrescente in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

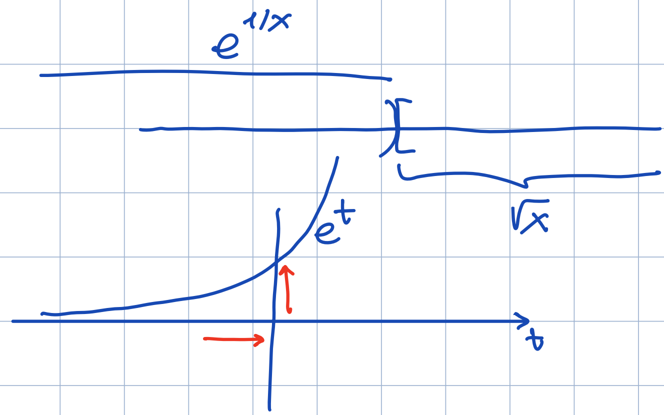
f è convessa in $(0, +\infty)$, concava in $(-\infty, 0)$

$\nexists$ pti staz, $\nexists$ punti di flesso.

$\exists$ as oriz $y=0$ completo

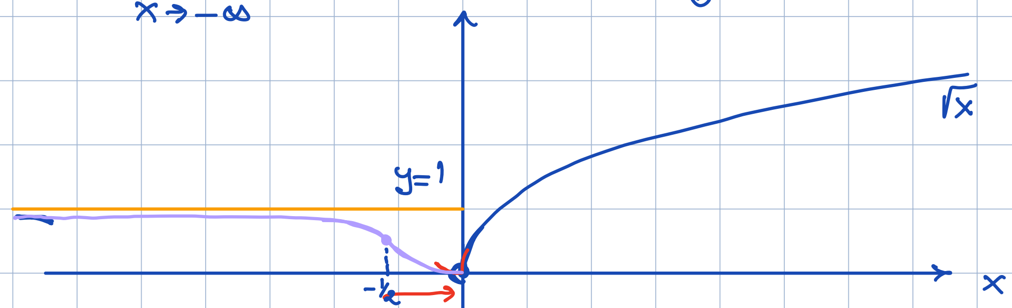
$x=0$ è pto di salto

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$



- $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
- simmetrie no

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{\overset{0^-}{1/x}} = 1^- \Rightarrow y = 1 \text{ è as. orizz sx}$$



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\overset{-\infty}{1/x}} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

$\Downarrow$

f è cont in $x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$\sqrt{x} \to +\infty$ meno velocemente di x e quindi $\nexists$ as obl dx

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \underbrace{mx}_{0}) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow \nexists$ asintoto obl

$$f'(x) = \begin{cases} e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x > 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

? in $x = 0$, calcolo $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - \overset{\to 0}{f(0)}}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\overset{\to -\infty}{1/x}}}{x} = \frac{0}{0} \text{ forma indet.}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}{1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-e^{1/x}}{x^2} = \frac{0}{0}$$

questo procedimento non porta a risultati utili

faccio la sost

$$t = \frac{1}{x} \quad \text{se } x \to 0^- \Rightarrow t \to -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cdot e^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} \underset{\to -\infty}{t}\cdot \underset{\to 0}{e^{t}} \quad FI \quad \text{non posso applicare de l'Hop.}$$

Faccio la sost $t = -\frac{1}{x}$ se $x \to 0^- \Rightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cdot e^{1/x} = \lim_{t\to+\infty} (-t)\cdot e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t}{e^t} \overset{(H)}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{-1}{e^t} = 0^-$$

$$\boxed{f'_-(0) = 0^-}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{x}\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\boxed{f'_+(0) = +\infty}$$

$\Rightarrow x = 0$ è pto angoloso

- $f'(x) \geq 0$

$\boxed{x < 0}$ $\quad f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} \geq 0$

$N = -e^{1/x} \geq 0$ mai perché $\exp > 0$

$D = x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$, ma $x = 0$ è esclusa dall'intervallo su cui sto studiando

quando $x < 0 \Rightarrow D > 0$

		0
N	$-$	
D	$+$	
f'	$-$	
f	$\searrow$	

f è decrescente in $(-\infty, 0)$

$\boxed{x>0}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x>0$ $\quad f$ è cresc in $(0,+\infty)$

	0	
f'		$+$
f		$\nearrow$

		0	
f	$\searrow$		$\nearrow$

$x=0$ è pto di min rel

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{1/x}}{x^2} & x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & x>0 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}x^{-1/2}$

$D(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$$\text{Calcolo } f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)\cdot \cancel{x^2} - e^{1/x}\cdot 2x}{x^4} & x<0 \\ \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-1/2-1} & x>0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x}(1+2x)}{x^4} & x<0 \\ -\dfrac{1}{4}x^{-3/2} & x>0 \end{cases}$$

$\boxed{x<0}$

$f''(x) \geq 0 \quad :$

$N_1 = e^{1/x} > 0 \quad \forall x<0$ * limitato a studiare per le $x<0$

$N_2 = (1+2x) \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$

$D = x^4 > 0 \quad \forall x<0$ *

		$-\frac{1}{2}$		0
N_1	$+$		$+$	
N_2	$-$	0	$+$	
D	$+$		$+$	
f''	$-$		$+$	
f	$\cap$		$\cup$	

f è concava in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

f è convessa in $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$x = -\frac{1}{2}$ è pto di flesso

$\boxed{x>0}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt[2]{x^3}} < 0 \quad \forall\, x>0$

f è concava in $(0,+\infty)$

$x=0$ è pto di min ass. (angoloso)

$\nexists$ pto di max ass perché f è illimitata sup.

$f(x) = e^{-x^2}$ funzione Gaussiana