

Teorema dei punti stazionari di Fermat

Sia f definita in un intorno $I_r(x_0)$ del punto x_0 e derivabile in x_0 .

Sia x_0 un punto di massimo o minimo relativo per f .

Allora x_0 è un punto stazionario per f .

Dim Ip: 1- f è def in $I_r(x_0)$ (completo)

2- f deriv in x_0

3- x_0 pto di max o min rel

Ts: x_0 è pto stazionario per f , cioè $f'(x_0) = 0$

Analizziamo il caso in cui x_0 è pto di max rel.

Per ipotesi (x_0 è pto di max rel) $\exists J(x_0)$ intorno completo di x_0

t.c.

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in J(x_0)$$

Considero $x \in J(x_0)$, $x < x_0$

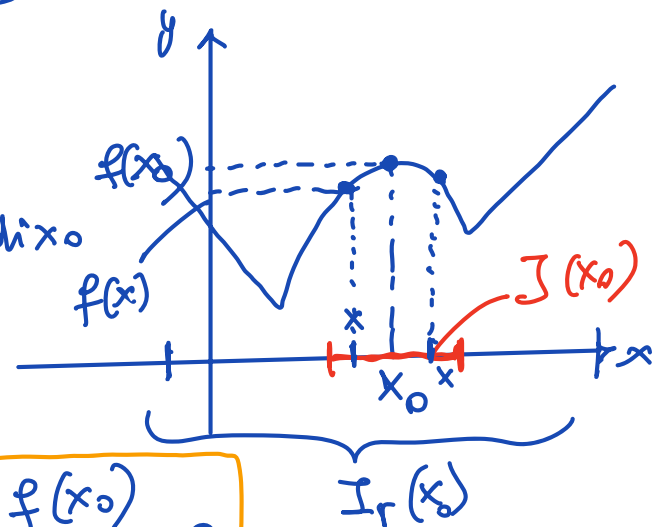
ho $f(x_0) \geq f(x)$ e $x < x_0 \Rightarrow$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Sempre per ip so che f è deriv in x_0 , allora

$$\exists f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

corollario al lim deve
peru. del segno



Ho trovato che $f'_-(x_0) \geq 0$

Ora prendo $x > x_0$, $x \in J(x_0)$, ho

$$f(x_0) \geq f(x) \quad e$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Poiché f è deriv in x_0 ,

$$\exists f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Ho trovato che $f'_+(x_0) \leq 0$

↑
corollario al thm delle
penne. del segno

$\Rightarrow$

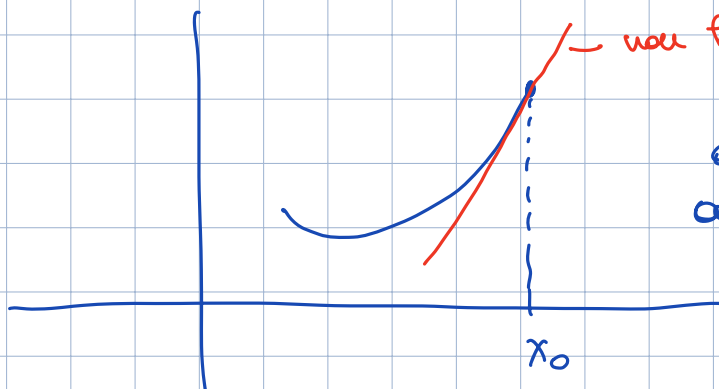
$$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$$

↑
 f è deriv in x_0

↓

$f'(x_0) = 0$, cioè x_0 è pto stazionario
(o critico)

c.v.d



— non ha coeff ang = 0

qui non posso
applicare il thm
di Fermat
perché f è definita
solo a sx di x_0 .

Studio di funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

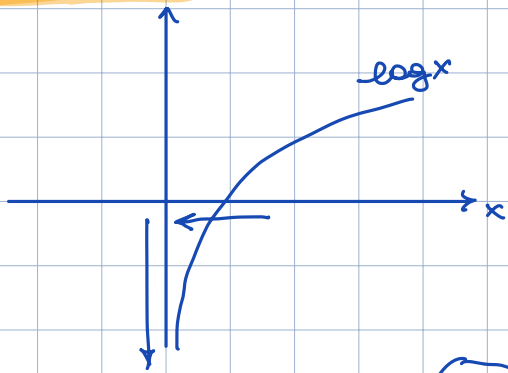
1) $\text{dom}(f) : \begin{cases} x > 0 & (\log) \\ x \neq 0 & (\text{denom}) \end{cases} \Rightarrow \text{dom}(f) = (0, +\infty)$

2) ? simmetrie (f è pari o dispari o niente)

Non simmetrie in quanto il dom. non è simmetrico rispetto allo 0.

3) calcolare i limiti di f alle frontiere del dominio e eventuali asintoti

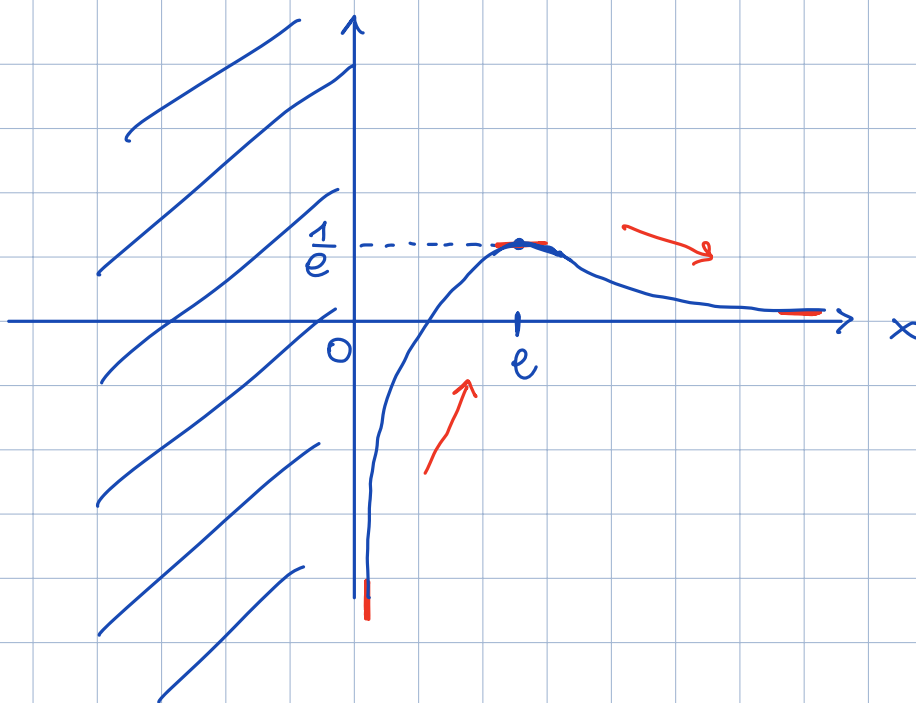
• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \cdot \frac{1}{0^+} = -\infty$



la retta $x=0$ è
asintoto verticale dx

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0^+$ (0^+ perché sia $\log x$ che x sono positive per $x \rightarrow +\infty$)

$\Rightarrow y=0$ è asintoto orizzontale dx



$$f(e) = \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e}$$

4) f è continua sul suo dominio?, sì perché rapporto di funz. elem. continue.

5) crescenza/decresc, pti staz, pti estremi

5.1) calcolo $f'(x)$

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2}$$

$$\left(\frac{N}{D}\right)' = \frac{N' \cdot D - N \cdot D'}{D^2}$$

$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$\text{dom}(f') = \text{dom}(f) = (0, +\infty)$$

Si sa che $\text{dom}(f') \equiv \text{dom}(f) \Rightarrow \nexists$ pti di non deriv.,
cioè f è deriv. in ogni punto di $\text{dom}(f)$

5.2) punti stazionari, cioè le sol di $f'(x) = 0$

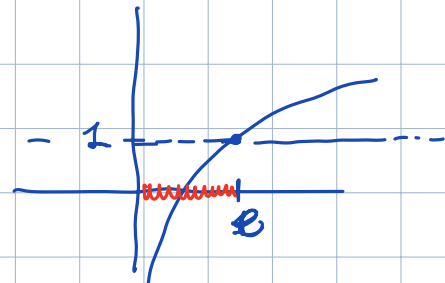
$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \log x = 0 \Leftrightarrow \log x = 1$$

$x = e$ è pto stazionario

$$x = e^{\log x} = e^1$$

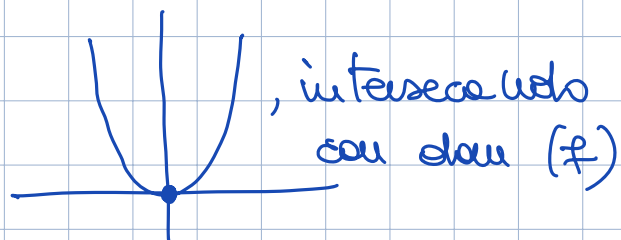
5.3) ? $x \in \text{dom}(f)$, $f'(x) \geq 0$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \log x}{x^2} \geq 0$$

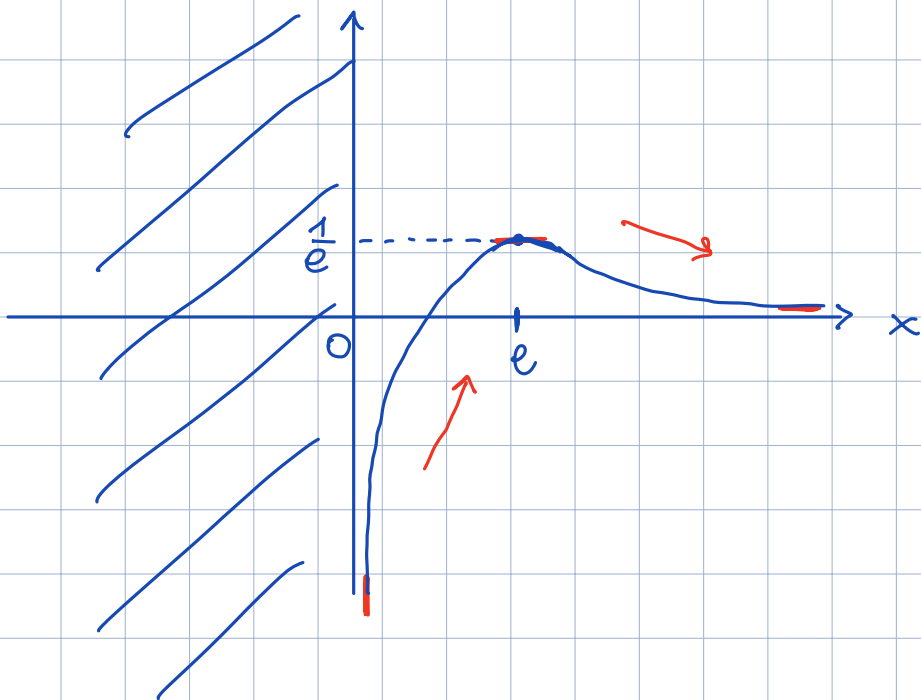
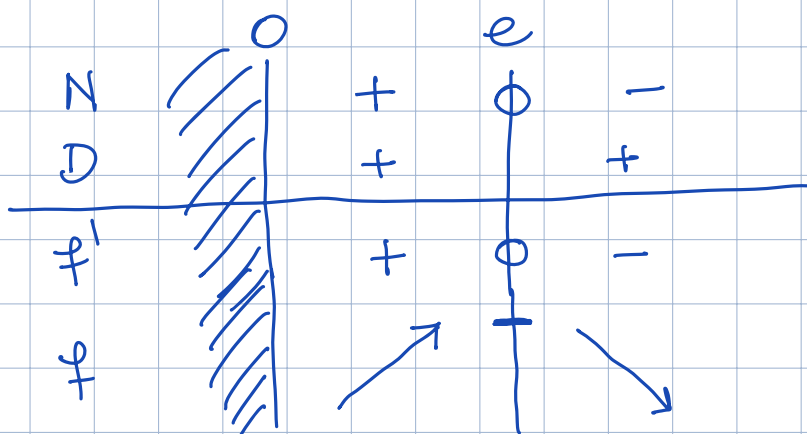


$N \geq 0$ $1 - \log x \geq 0$, $\log x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq e$

$D > 0$ $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$



ho $x^2 > 0 \forall x \in \text{dom}(f)$



f è crescente in $(0, e)$
 f è decrescente $(e, +\infty)$

$x = e$ è pto di max rel
 e assoluto ed è
 pto stazionario

Non punti di min rel/ass.
 perché f è illimitata
 inferiormente

Thm di Rolle

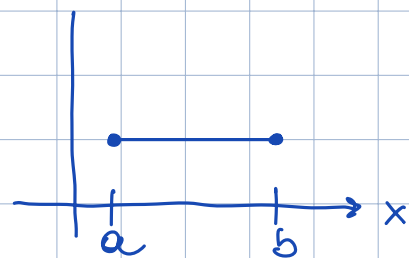
- Ip: 1- f sia cont su $[a, b]$ chiuso e limitato
2- f sia deriv su (a, b)
3- $f(a) = f(b)$

Ts: $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = 0$

Diciam Il thm di Weierstrass garantisce che f ammetta un massimo M e un minimo m in $[a, b]$.

Caso 1. $m = M = f(a) = f(b)$

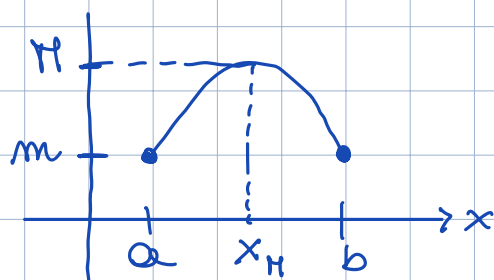
$\Rightarrow f$ è costante $\Rightarrow f'(x) = 0$
 $\forall x \in (a, b)$



cioè tutti i punti dell'intervallo (a, b) sono punti stazionari

Caso 2 $m < f(a) = f(b) < M$

x_M = punto di massimo cade
all'interno di (a, b)
($x_M \neq a$ e $x_M \neq b$)

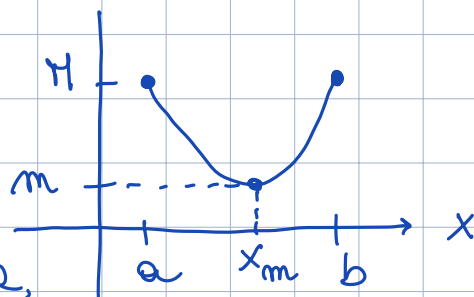


Osservo che f è definita in un intorno completo di x_M ,
 f è deriv in x_M (perché per ip f è deriv su (a, b))
e x_M è pto di max abs e quindi relativo.

Posso applicare il thm di Fermat al punto x_M e concludere
che $f'(x_M) = 0$, cioè il punto c della tesi è x_M .

Caso 3 $m < f(a) = f(b) \leq M$

x_m punto di minimo è interno
ad (a, b) . Ragionando come prima,
applicando Fermat, si ha $f'(x_m) = 0$.



C.v.d.

Thm di Lagrange:

Ip: f cont in $[a, b]$ chiuso e limitato
 f deriv in (a, b)

Ts: $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Dim - Definisco $h(x) = f(x) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}_{\text{retta nella variabile } x}$

Osservo che h è continua in $[a, b]$ perché differenza di 2 funz continue; f per ip, la retta perché è una funz elev cont.
Inoltre h è derivabile in (a, b) perché differenza di 2 funz deriv.

Calcolo $h(a)$ e $h(b)$

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \underbrace{(a - a)}_0 = f(a) \Rightarrow h(a) = h(b)$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cancel{(b - a)} = f(a)$$

h verifica le ip del thm di Rolle, allora vale la tesi del thm di Rolle, cioè $\exists c \in (a, b)$ t.c. $\underbrace{h'(c)}_{} = 0$.

$$\text{Valuto } h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x}_{\text{da derivata}} - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a}_{\text{da derivata}} = 0$$

Dire $f'(c)=0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

cioe la fun'

c.v.d