

Criterio del rapporto

Sia a_n una successione e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > 0$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

Sia $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Se $q < 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

se $q > 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$,

se $q = 1$ allora non posso concludere nulla.

$m^n, m!, q^n \dots$
 $q > 1$

Esercizi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1}}{n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/n^2} - 1}{2n^{-2} \cdot \log(n+7)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

Es 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = a_n$$

applico il criterio del rapporto

$a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$, il criterio può essere applicato

$$\begin{aligned} \text{Calcolo } q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!} \cdot n^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \end{aligned}$$

limite fondamentale

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e > 1$$

Per il criterio del rapporto, concludo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

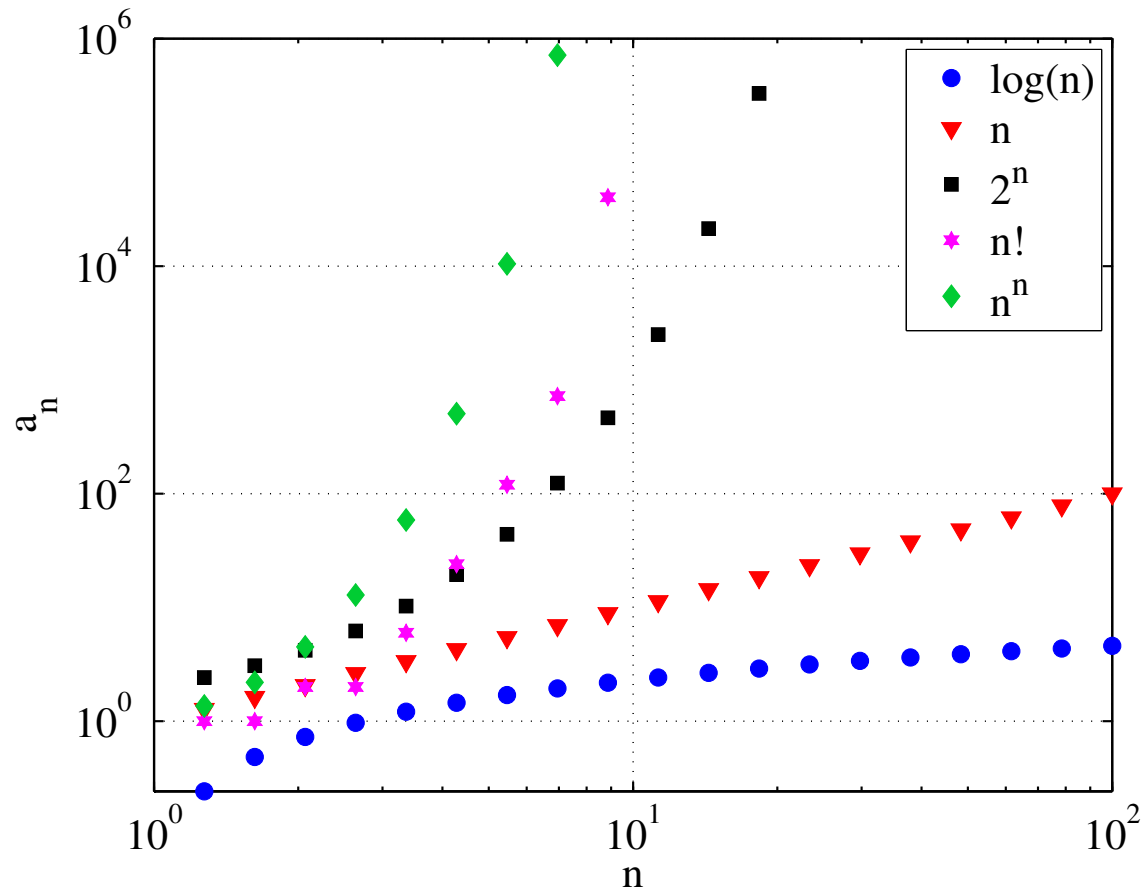
cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$ cioè n^n è una succ
con ordine di ∞
maggiore di quello
di $n!$

per $n \rightarrow \infty$, $n^n \rightarrow \infty$ + velocem
di quanto non faccia $n!$

Confronto riassuntivo sugli ordini di infinito

Le seguenti successioni sono ordinate, in ordine crescente, da sinistra a destra riguardo al loro ordine di infinito.

$(\log n)^\beta$	n^α	q^n	$n!$	n^n
$(\beta > 0)$	$(\alpha > 0)$	$q > 1$		



Es 2

 $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\frac{3^n}{n^3}$$

è una succ geometrica con $q=3$ è una potenza di n Applico il criterio del rapporto alla succ $a_n = \frac{3^n}{n^3}$ $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$, verifica le ip del criterio

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{3^n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{3^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot n^3}{(n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} = 3 \end{aligned}$$

$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \sim n^3$ per $n \rightarrow \infty$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 > 1 \Rightarrow \text{per il criterio del rapporto}$$

$$\text{si ha } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^3}$$

cioè $3^n \rightarrow \infty$ più velocemente di n^3 quando $n \rightarrow +\infty$ 3^n ha ordine di ∞ maggiore di n^3 quando $n \rightarrow +\infty$

Es 3

 $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

a_n

osservo che $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$

applico il criterio del rapporto

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2(n+1)}}}{\frac{(2n)!}{n^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n} \cdot (n+1)^2} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} =$$

$$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1) \dots 2 \cdot 1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 \cdot \sqrt{4n^2 + 6n + 2} \cdot (2n)! \cdot n^{2n}}{(n+1)^{2n} \cdot (n+1)^2 \cdot (2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 \cdot n^{2n}}{(n+1)^{2n} \cdot n^2} =$$

$\sim n^2$ $\xrightarrow{h^2+2n+1}$

$$= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right]^n =$$

$$= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \right]^2 = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^2 =$$

$$= 4 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^2 = 4 \cdot \frac{1}{e^2} = 9$$

$\downarrow e$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{e^2} < 1$$

per il criterio del rapporto $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$

$\Rightarrow (2n)!$ ha ordine di ∞ inferiore rispetto a n^{2n} .

Es $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/n^2} - 1}{2n^{-2} \log(n+7)} = \frac{0}{0 \cdot \infty}$

$a^b = e^{\log a^b} = e^{b \cdot \log a}$

$\downarrow 0$ $\downarrow +\infty$ $\neq I$

$n^{1/n^2} = e^{\frac{1}{n^2} \log n} \rightarrow 1$ per $n \rightarrow \infty$

$n^{1/n^2} - 1 = e^{\frac{1}{n^2} \log n} - 1 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$

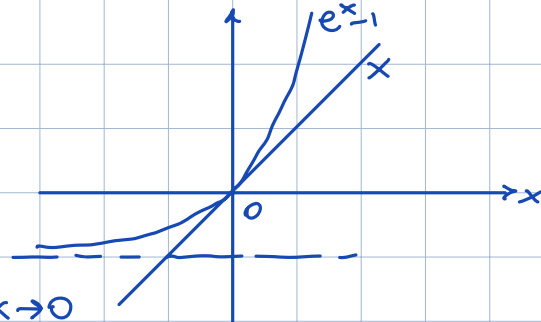
parto dal numeratore

$$n^{1/n^2} - 1 = e^{\frac{1}{n^2} \log n} - 1 = e^x - 1 \sim x = \frac{1}{n^2} \log n$$

sost $x = \frac{1}{n^2} \log n, x \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$

Ricordo il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\Downarrow \\ e^x - 1 \sim x \text{ per } x \rightarrow 0$$



Ho trovato che $n^{1/n^2} - 1 = e^{\frac{1}{n^2} \log n} - 1 \sim \frac{1}{n^2} \log n$ quando $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/n^2} - 1}{2 n^{-2} \log(n+7)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \log n}{\frac{2}{n^2} \log(n+7)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\log n}{\log(n+7)}}_1 = \frac{1}{2}$$

Ordini di infinitesimo

a_n è infinitesimo se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{0}{0}$$

Siano a_n e b_n due successioni infinitesime.

1. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ diciamo che a_n ha **ordine di infinitesimo maggiore** di quello di b_n .

Esempio: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n}}{1/n} = 0$,

2. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$ diciamo che a_n e b_n hanno lo **stesso ordine di infinitesimo** e scriviamo $a_n \sim \ell b_n$ per $n \rightarrow \infty$

Esempio: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} \left(= 1\right) \underset{x=1/n}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ quando $n \rightarrow \infty$

3. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ diciamo che a_n ha **ordine di infinitesimo minore** di quello di b_n .

Esempio: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n^2} = \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n} \rightarrow 0}{1/n \rightarrow 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \rightarrow +\infty}{2^n \rightarrow +\infty} = 0$$

2^n ha ordine di ∞ maggiore di n

$\Rightarrow 2^{-n}$ è una succ ∞ -sima con ordine di ∞ -simo maggiore di $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_1 \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} n}_{+\infty} = +\infty$$

$\frac{1}{n^2}$ ha ordine di ∞ -simo maggiore rispetto a $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

? ha as. obliqui?

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq 0\} = \mathbb{R}$$

? $\exists$ as. ^{obl} per $x \rightarrow +\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 + 1/x^2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{vero solo se } x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2} \neq x \quad \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

lavoro con $x \in I(+\infty)$

cioè $x > 0$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$m = 1$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 + 1}}_{+\infty} - \underbrace{x}_{-\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{x^2 + 1}^{A^2} - \overbrace{x^2}^{B^2}}{\underbrace{\sqrt{x^2 + 1}}_{\sim \sqrt{x^2}} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$y = mx + q = x \quad \text{as. obl. obl.}$$

Cerco asintoto obl. di $\sqrt{x^2+1}$:

$x \rightarrow -\infty$, cioè $x \in I(-\infty)$
 $x < 0$
 $\sim \sqrt{x^2} = -x$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \in \mathbb{R}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{+\infty} + \underbrace{x}_{-\infty} \right) = +\infty - \infty$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{\underbrace{\sqrt{x^2+1} - x}_{\sim \sqrt{x^2} = -x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1 - x^2}{-2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2x} = 0$$

$y = -x$ è as. obl. di $\sqrt{x^2+1}$

$\sqrt{x^2+1}$

