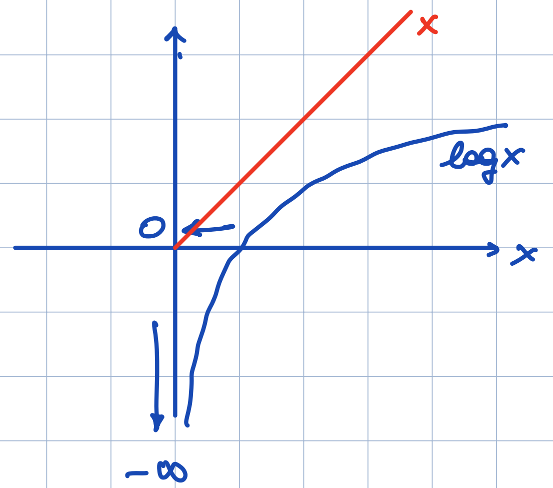
ESERCIZI 22/10/25

$$\lim_{x\to0^+} \underset{\downarrow\, 0^+}{x}\cdot\underbrace{\log x}_{\downarrow\, -\infty} = 0\cdot(-\infty) \quad \text{forma indet.}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}}{\frac{1}{x}} =$$



$$\frac{\log x}{\frac{1}{x}} = (\log x \cdot)\, x$$

$$= \lim_{x\to0^+} - \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$\uparrow$ $y=\frac{1}{x}$ se $x\to0^+$ $\Rightarrow y\to+\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty}(-1)\frac{\log y}{y} \underset{AL}{=} (-1)\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{y}}_{0} = 0$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}$$

Att.ne non è garantito che $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

$y=\log_e x \iff e^y = x$

- sostituisco $x=e^y$ in $y=\log_e x$: $\boxed{y=\log_e e^y}$ (1)

- sostituisco $y=\log_e x$ in $e^y=x$ ottengo $\boxed{e^{\log_e x}=x}$ (2)

$$x \xmapsto{\log_e} \log_e x \xmapsto{\exp} e^{\log_e x} = x$$

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{\log_e f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log_e f(x)}$$

(2)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\log_e f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\log_e f(x)}}$$

Es $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\log_e x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log_e x} = e^0 = 1$

$f(x) = x \qquad g(x) = x$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} e^{x^2\cdot\log x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x^2\cdot\log x} = e^0 = 1$$

$$\left(\lim_{x\to 0^+} x^2\cdot\log x = \lim_{x\to 0^+} x\cdot(x\log x) \underset{AL}{=} \underbrace{\lim_{x\to 0^+} x}_{0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0^+} x\log x}_{0} = 0\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\cdot\log x = 0 \qquad \forall\alpha>0$$

---

1) Ricordiamo $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2) vale anche $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(si dimostra grazie al thm del limite di funz monotone

• 3) $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} \underset{\text{sostit.}}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$

$y = \frac{1}{x}$ se $x\to 0^+ \Rightarrow y\to+\infty$

$\Downarrow$

$x = \frac{1}{y}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$$

4) $\lim_{x\to 0^-}\left(1+x\right)^{1/x} = \lim_{y\to -\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$

$y=\frac{1}{x}$ se $x\to 0^- \Rightarrow y\to -\infty$

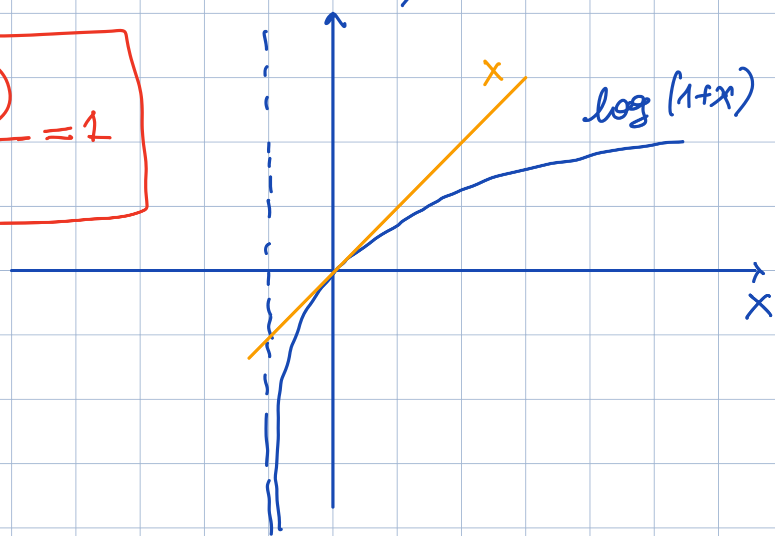
$\boxed{\log x = \log_e x}$

$\boxed{\log a^b = b\log a}$

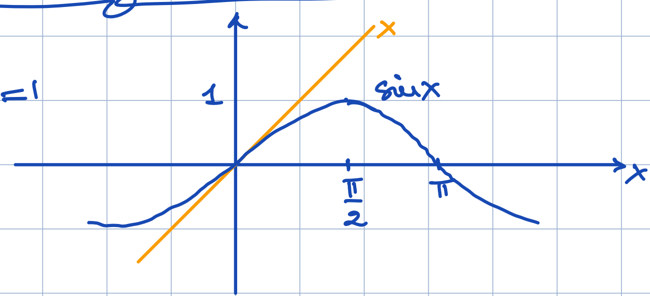
5) $\lim_{x\to 0^\pm}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{x}\cdot\log(1+x) =$

$= \lim_{x\to 0^\pm}\log\left(\left(1+x\right)^{1/x}\right) = \log\left(\lim_{x\to 0^\pm}\left(1+x\right)^{1/x}\right) = \log e = 1$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1}$$



$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$



6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(y+1)}$

sost $\underbrace{y=e^x-1}$ ricavo x $\quad y+1=e^x$

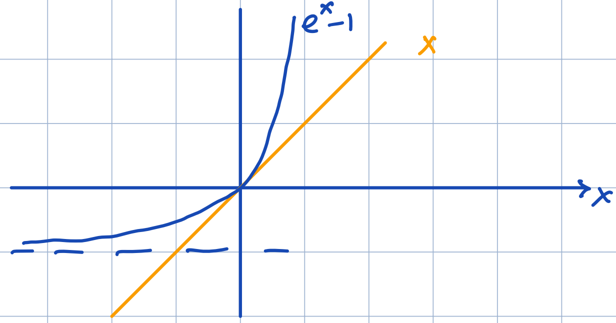
$\log(y+1) = \log e^x = x$

se $x\to 0 \Rightarrow y=e^x-1\to 0$

$= \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log(y+1)}{y}} \underset{AL}{=} \frac{\lim_{y\to 0} 1}{\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}} = 1$

1 $\quad 1$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$$



ES: Studio la continuità di $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$ sul dom(f).

Quando $x \neq 0$ $\quad f(x)=e^{-1/x^2}$

esponenziale è cont su tutto $\mathbb{R}$

$-\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$ è cont in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ perché è il rapporto di 2 funz elem cont su tutto $\mathbb{R}$ e quindi il rapporto è continuo dove il denominatore non si annulla

e^{-1/x^2} è la composizione di 2 funz cont ed è quindi continua

Devo capire cosa succede in $x=0$
devo calcolare

$$\lim_{x\to 0^-} f(x), \quad \lim_{x\to 0^+} f(x), \quad f(0)$$

$x^2 \to 0^+$, $\quad -1/x^2 \to -\infty$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-1/x^2} = 0$$

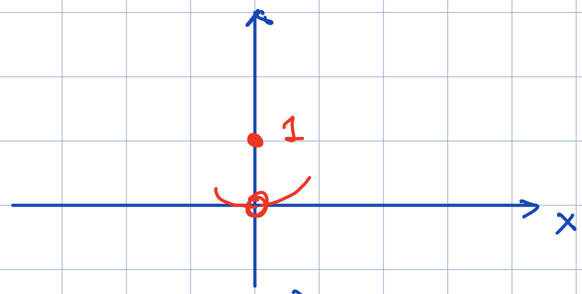
$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$

$-1/x^2 \to -\infty$, $\quad x^2 \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x^2} = 0$$

Non basta che $\exists \lim_{x\to 0} f(x)=0$ per garantire che f sia continua in 0

Devo vedere cosa è $f(0) = 1$ (dalla def di f)



$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$

$\Rightarrow x_0 = 0$ è pto di disc eliminabile