Se f è cont, per calcolare $\int_a^b f(t)\,dt$:

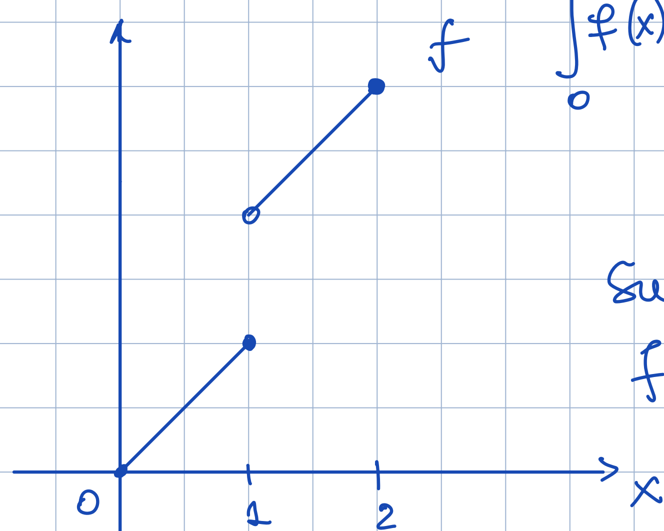
① calcolare una primitiva di f, sia G

② calcolare $G(b) - G(a)$

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

Se f non è cont, applico l'additività dell'$\int$ e poi riapplico il 2° teor su ogni intervallo su cui f è cont!

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$$

Su ogni interv. f è continua

Integrazione per parti

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

Es: $\displaystyle\int_e^{e^2} x\cdot\log x\,dx =$

x (f'), $\log x$ (g)

$x\log x$ è cont in $[e, e^2]$

$f'(x) = x \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$g(x) = \log x \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{1}{2}x^{\cancel{2}}\,\frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_e^{e^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_e^{e^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(e^2)^2\log e^2}_{G(b)} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^2\cdot\log e\right)}_{G(a)} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^4\cdot 2 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4}e^2$$

$$= \frac{3}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^2 .$$

Int. per sostituzione

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{1+4\cos^2(x)}\,dx \quad = \quad$$ funz integranda cont su $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$y=\varphi(x) = 1+4\cos^2(x)$$

$$dy = \varphi'(x)dx = 4\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)\overset{dx}{\checkmark} = -4\cdot \underbrace{\sin(2x)dx}$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{\overbrace{-4\sin(2x)\,dx}^{dy}}{\underbrace{1+4\cos^2(x)}_{y}} = -\frac{1}{4}\int_5^1 \frac{dy}{y} =$$

se $x=0 \Rightarrow y=\varphi(0) = 1+4\cdot\underbrace{\cos^2(0)}_{1} = 5$

se $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+4\cdot\underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} = 1$

una primitiva di $\frac{1}{y}$ è $\log|y|$

$$= -\frac{1}{4}\Big[\log|y|\Big]_5^1 = -\frac{1}{4}\Big(\underbrace{\log 1}_{0} - \log 5\Big) = \frac{1}{4}\log 5$$

Ho fatto la sostituzione $y=\varphi(x)$ nella funzione integranda ed ho sostituito anche i valori degli estremi di integrazione:

$x=0$ è diventato $y=5$

$x=\frac{\pi}{2}$ è diventato $y=1$

2° modo di procedere (alternativo al precedente)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{1+4\cos^2(x)}\,dx = (*)$$

cerco una primitiva, cioè calcolo $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1+4\cos^2 x}\,dx =$

sostituzione: $y = 1+4\cos^2 x \qquad dy = -4\sin(2x)\,dx$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\overbrace{-4\sin(2x)\,dx}^{dy}}{\underbrace{1+4\cos^2 x}_{y}} = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{4}\log|y|$$

ritorno alla variabile x

$$= \underbrace{-\frac{1}{4}\log|1+4\cos^2 x|}_{G(x)}$$

$$(*) = \left[-\frac{1}{4}\log|1+4\cos^2 x|\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\log|1+\underbrace{4\cos^2\frac{\pi}{2}}_{0}| - \left(-\frac{1}{4}\log|1+\underbrace{4\cos^2 0}_{4}|\right)$$

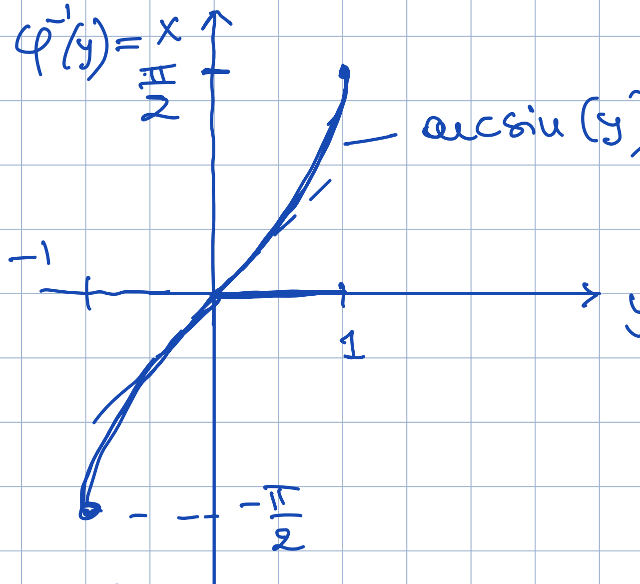
$$= -\frac{1}{4}\underbrace{\log 1}_{0} + \frac{1}{4}\log 5 = \frac{1}{4}\log 5 -$$

Ho applicato la sostituzione nel calcolo dell'integrale indefinito e poi sono tornato alla variabile x, cioè

ho scritto la primitiva G rispetto a x. Ho utilizzato G(x) nella formula $\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b$.
Gli estremi a e b sono rimasti inalterati.

$$\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy =$$

$$y = \sin x = \varphi(x) \overset{?}{\Longrightarrow} x = \varphi^{-1}(y) = \arcsin(y)$$



$\arcsin(y) = \varphi^{-1}(y)$ è biunivoca su $[0,1]$ perché lo è $y = \varphi(x) = \sin x$ su $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$y = \varphi(x) = \sin x$$

$$dy = \varphi'(x)\,dx = \cos x \cdot dx$$

se $y = 0 \Rightarrow x = \arcsin(y) = 0$

se $y = 1 \Rightarrow x = \arcsin(y) = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 x}}_{+\cos x} \cdot \underbrace{\cos x\,dx}_{dy} =$$

su $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$$

Calcolo $\int \cos^2 x \, dx$, trovo una primitiva $G(x)$ e applico il 2° teorema fond. del calcolo

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \underset{f'}{\cos x} \cdot \underset{g}{\cos x} \, dx =$$

$f(x) = \sin x \quad g'(x) = -\sin x$

$\int f'g = fg - \int fg'$

$$= \sin x \cdot \cos x + \int +\sin^2 x \, dx$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \underbrace{\int dx}_{x} - \int \cos^2 x \, dx$$

porto $-\int \cos^2 x \, dx$ a sinistra

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} = G(x)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \left[G(x) \right]_0^{\pi/2} = \left[\frac{\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{0} + \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\sin(0) \cdot \cos(0) + 0}{2} \right] = \frac{\pi}{4}$$