- $$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{1/n}-1-\frac{1}{n}\right)(n+1)!}{(n-1)!+2^{-n}+\sin(n!)-3^n} =$$

num: $\left(e^{1/n}-1-\frac{1}{n}\right) \to 0$ per $n\to\infty$

$(n+1)! \to +\infty$

$e^{1/n}-1-\frac{1}{n} =$

se $n\to\infty \Rightarrow x=\frac{1}{n} \to 0$

$e^{1/n} = e^x$ Taylor

$$e^{1/n} = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \cancel{1}+\cancel{\frac{1}{n}}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\cancel{-1}-\cancel{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$ per $n\to\infty$

den: $\underbrace{(n-1)!}_{+\infty}+\underbrace{2^{-n}}_{\text{succ geom}}+\underbrace{\sin(n!)}_{\text{indet. ma limitata}}-3^n \to +\infty$

succ geom con $q=\frac{1}{2}$ $|q|<1$

$$2^{-n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \text{ per } n\to\infty$$

? è + importante $(n-1)!$ o 3^n

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{3^n}$ a_n posso applicare un criterio del rapporto alla succ $\frac{(n-1)!}{3^n}$

Criterio del rapporto per le succ:

Se $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $a_n > 0 \ \forall n$

se $\ell < 1 \Rightarrow$ la succ conv. a zero

se $\ell > 1 \Rightarrow$ la succ diverge

se $\ell = 1 \Rightarrow$ non posso concludere

$n! = n(n-1)!$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1-1)!}{\cancel{3^{n+1}}\,3} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{(n-1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cancel{(n-1)!}}{3\cancel{(n-1)!}} = +\infty \Rightarrow a_n \text{ diverge}$$

cioè $(n-1)! \to +\infty$ più velocemente di 3^n

$\Rightarrow$ DENOMIN $\sim (n-1)!$

$\underbrace{(n+1)n}\cancel{(n-1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \ldots\ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n^2}(n+1)!}{\cancel{(n-1)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

$n! = n\underbrace{(n-1)(n-2)\ldots\ 2\cdot 1}_{(n-1)!} = n\cdot(n-1)!$

$(n+1)! = (n+1)n\overbrace{(n-1)\ldots\ 2\cdot 1}^{(n-1)!}$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{1/x}$ (*) $= 1^{\infty}$ F. I.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \to 1 \qquad x\to 0^+$$

$$\frac{1}{x} \to +\infty$$

$$\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{1/x} = e^{\log\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{1/x}} = e^{\frac{1}{x}\log\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

$$(*) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\log\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)} = e^{\overset{L}{\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\log\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}}} = e^{0} = 1$$

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\to 0}{\log\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}}{\underset{\to 0}{x}} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\overset{\to 0}{\cos(x+\pi/2)}}{\underset{\to 1}{\sin(x+\pi/2)}}}{1} = 0$$

• $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} - \cos x & x \le 0 \\[2ex] \dfrac{1-\cos x}{x^\alpha} \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x > 0 \end{cases} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

discutere la cont. di f in $x=0$
e classificare e' eventuale punto di disc.

f è cont in x_0 (x_0 pto di acc per il $\mathrm{dom}(f)$)
se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

• $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \Big(\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\to 1} - \underbrace{\cos x}_{\to 1} \Big) = 0$$

$f(0) = 0$ (f è continua da sx indip da α)

• $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^\alpha} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{} = (*)$$

$x \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty$
$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ non ammette lim
per $x \to 0^+$
ma è limitata

Ora guardo cosa fa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^\alpha} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} x^{2-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } 2-\alpha>0 \iff \alpha<2 \\ \frac{1}{2}\cdot 1 & \text{se } 2-\alpha=0 \iff \alpha=2 \\ +\infty & \text{se } 2-\alpha<0 \iff \alpha>2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \overset{=1}{x^0} = 1$$

$$(*) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<2 \quad \text{(infinitesima per limitata)} \\ \nexists & \text{se } \alpha\geq 2 \end{cases}$$

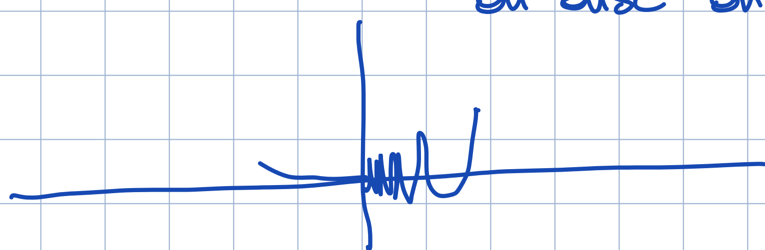
abbiamo il prodotto di qualcosa che continua a oscillare per una quantità che $\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$

Se $\alpha<2 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

cioè f è continua in $x=0$.

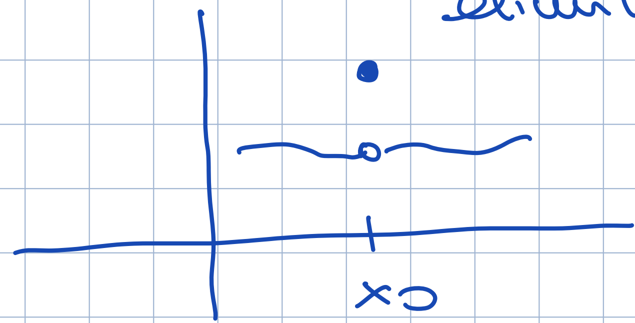
Se $\alpha\geq 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \nexists \Rightarrow x=0$ è pto di disc di 2^a sp.

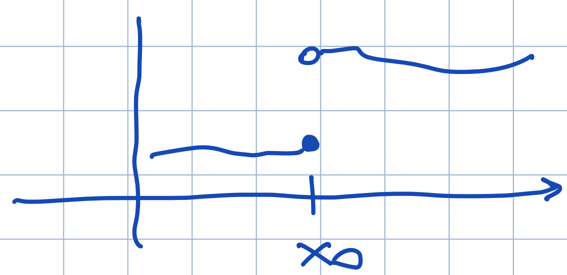


Siano $\ell_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ $\quad \ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Se $\ell_1 = \ell_2 \neq f(x_0)$ $\Rightarrow$ x_0 è pto di disc eliminabile



Se $\ell_1 \neq \ell_2$ entrambi finiti $\Rightarrow$ x_0 è pto di salto



Se $\exists\, \ell_1$ e ℓ_2 finiti o infiniti e almeno uno dei due è ∞ $\Rightarrow$ x_0 è pto di ∞

Se ℓ_1 e/o ℓ_2 non esistono $\Rightarrow$ x_0 è pto di disc di II specie

- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 \left(\cancel{\log(x^4) - \log(x^2)} \right)}{\left(x - \sin x + e^{x^3/6} - 1\right) \cdot \cancel{\log(x^2)}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

? cont e deriv in $x=0$

CONTINUITA'

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$\log(x^4) - \log(x^2) = \log \frac{x^4}{x^2} = \log x^2$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^4}{x - \sin x + e^{x^3/6} - 1} \qquad \text{Taylor}$$

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$
- $e^{x^3/6} = 1 + \underset{t}{\dfrac{x^3}{6}} + \underbrace{\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{2}}_{t^2/2} + o(x^6) \qquad e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$

$$x - \sin x + e^{x^3/6} - 1 = \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \cancel{1} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$- \cancel{1} = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^4}{\frac{x^3}{3}} = 0$$

Avevo $f(0)=0$ $\Rightarrow$ f è cont in $x=0$

DERIVABILITÀ

1° $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

non serve calcolare derivate

se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ $\Rightarrow$ f è deriv in x_0

2° : calcolare $f'(x)$ e $\lim_{x\to x_0^\pm} f'(x) = l_\pm$

se $\exists\, l_\pm$ $\Rightarrow$ essi sono uguali a $f'_\pm(x_0)$

1° modo è molto comodo quando $x_0=0$
e $f(x_0)=0$

$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x)-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}}{x-0} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^4}{x\left(x-\sin x+e^{x^3/6}-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x}\cdot \cancel{x^3}/3} = 3$$

$\uparrow$

per i conti di prima

ottengo che $f'_-(0) = f'_+(0) = 3$

cioè f è derivabile in $x_0 = 0$

e $f'(0) = 3$

- $f(x) = x\, e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)}$ studiare

sapendo che $e^{\pi/2} \sim 4.81$

$$\mathrm{dom}(f) = \begin{cases} x \neq 0 \\ / \end{cases} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

sim: $f(-x) = -x \cdot e^{2\arctan\left(\frac{2}{-x}\right)} = -x\, e^{-2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)}$

arctan è dispari

$\neq f(x)$

$\neq -f(x)$

$\Rightarrow$ non ho simmetrie.

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \underset{\mp\infty}{x}\, e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)} = \mp\infty \cdot 1 = \mp\infty$$

$\frac{2}{x} \to 0$, $2\arctan\left(\frac{2}{x}\right) \to 0$, $e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)} \to 1$

$\Rightarrow \nexists$ as orizz.

potrebbero esistere as obliqui

$$m_{\mp} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\cancel{x}\, e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)}}{\cancel{x}} = 1$$

$e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)} \to 1$

$$q_{\mp} = \lim_{x\to\mp\infty} \left(f(x) - \overset{1}{m}\, x\right) = \lim_{x\to\mp\infty} \left(x e^{\cdots\cdots} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\mp\infty} \underbrace{x}_{\to\mp\infty} \cdot \underbrace{\boxed{\left(e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)} - 1\right)}}_{\to 0} = \lim_{x\to\mp\infty} x\cdot\frac{4}{x} = 4$$

$$\sim \frac{4}{x}$$

quando $x \to -\infty$ $\quad \frac{2}{x} \to 0 \Rightarrow \arctan\left(\frac{2}{x}\right) \sim \frac{2}{x}$

$$\Rightarrow e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)} - 1 \sim e^{\frac{4}{x}} - 1 \sim \frac{4}{x} \qquad \frac{4}{x} \to 0$$

$e^{t} - 1 \sim t$ per $t \to 0$

$\Rightarrow$ $y = x + 4$ è as. obliquo completo.

- ? $x \to 0^{\pm}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)} = 0\cdot e^{-\pi} = 0$$

$$\frac{2}{x} \to -\infty, \qquad 2\arctan\left(\frac{2}{x}\right) \to -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)} = 0\cdot e^{\pi} = 0$$

$$\frac{2}{x} \to +\infty, \qquad 2\arctan\left(\frac{2}{x}\right) \to \frac{\pi}{2}$$

$\nexists$ as verticale in $x = 0$

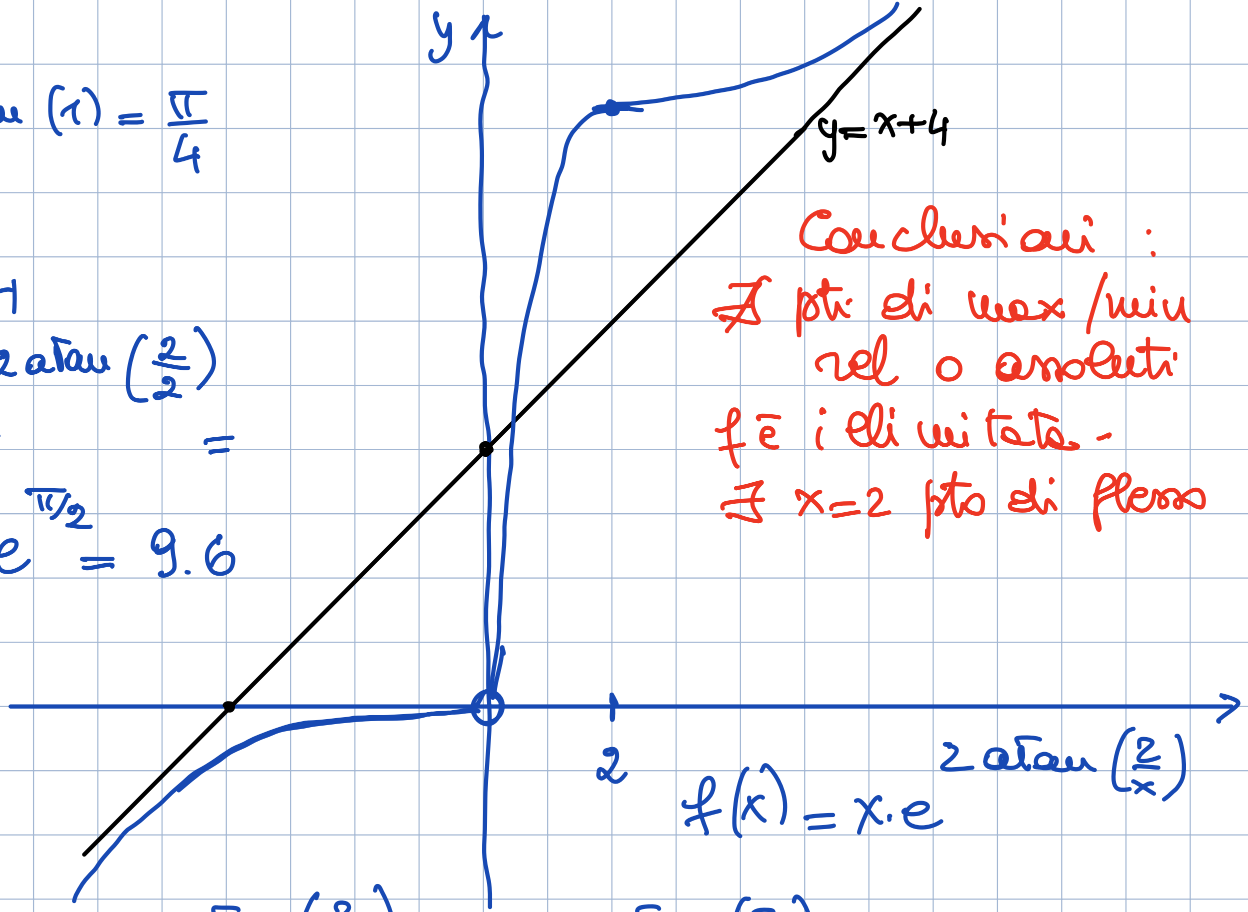
e f non può essere continua in $x=0$ perché non è definita in $x=0$

$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$e^{\pi/2} \sim 4.81$

$f(2) = 2 \cdot e^{2\arctan\left(\frac{2}{2}\right)} =$

$= 2 \cdot e^{\pi/2} = 9.6$



Conclusioni:
∄ pti di max/min rel o assoluti
f è illimitata.
∃ x=2 pto di flesso

$$f(x) = x \cdot e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)} + x \cdot e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot D\left(2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)\right) =$$

$$D\left(2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)\right) = 2 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-2}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{-4}{\frac{x^2+4}{\cancel{x^2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} = \frac{-4}{x^2+4}$$

$$= e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)}\left(1 - \frac{4x}{x^2+4}\right) = e^{\cdots}\left(\frac{x^2+4-4x}{x^2+4}\right)$$

$$= e^{2\arctan\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2+4} = f'(x)$$

$dom(f') = dom(f)$ $\qquad$ $x^2+4 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\nexists$ pti di non deriv.

- pti staz: $f'(x) = 0 \iff e^{\cdots}(x-2)^2 = 0 \iff (x-2)^2 = 0$

  cioè $x = 2 \in dom(f')$ è pto staz.

- $f'(x) \geq 0 \qquad e^{\cdots} \dfrac{(x-2)^2}{x^2+4} \geq 0$

$F_1 = e^{\cdots} > 0 \quad \forall x \in dom(f)$

$F_2 = (x-2)^2 \geq 0 \quad \forall x \in dom(f)$

$F_3 = x^2+4 > 0 \quad \forall x \in dom(f)$

		0		2	
F_1	+		+		+
F_2	+		+	0	+
F_3	+		+		+
f'	+		+	0	+
f	↗		↗	–	↗

$x = 2$ pto staz di flesso

f è cresc in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f'' = \dots\dots$

risulta $f'' \leq 0$ in $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$, qui f è concava

$f'' \geq 0$ in $(2, +\infty)$, qui f è convessa

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left[(3e^n)^n\right] - n^2}{\log\left(\frac{3+e^{2n}}{n}\right) - n} = (*)$$

$\log(ab) = \log a + \log b$

$$\text{NUM} = n\log(3e^n) - n^2 = n\left(\log(3e^n) - n\right)$$
$$= n\left(\log 3 + \underbrace{\log e^n}_{n} - n\right) = n \cdot \log 3$$

$$\text{DEN} = \log(3+e^{2n}) - \log n - n \sim 2n - \log n - n$$
$$= n - \log n$$
$$\sim n$$

$$\log(3+e^{2n}) \sim \log(e^{2n}) = 2n \quad \text{per } n \to \infty$$

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\log 3}{n} = \log 3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(e^{\overbrace{\sqrt[n]{n}-1}^{=x \xrightarrow{?} 0 \text{ per } n\to\infty ?}}-1\right)}{7\log n} =$$

So che $e^x - 1 \sim x$ se $x \to 0$. Guardo cosa fa $x = \sqrt[n]{n} - 1$ quando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} - 1 = \lim_{n\to\infty} e^{\log n^{1/n}} - 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\overbrace{\frac{1}{n}\log n}^{\to 0}} - 1 = 0$$

Allora $e^{\sqrt[n]{n}-1} - 1 \sim \sqrt[n]{n} - 1$ per $n \to \infty$

e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(e^{\sqrt[n]{n}-1}-1\right)}{7\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)}{7\log n} \overset{(*)}{=}$

Ora vedo come trattare $\sqrt[n]{n}-1$. Ho

$$\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\overbrace{\frac{1}{n}\log n}^{= x \to 0}} - 1 \sim \frac{1}{n}\log n \quad \text{per } n \to \infty,$$

quindi

$$\overset{(*)}{=} \lim \frac{n \cdot \frac{1}{n}\log n}{7\log n} = \frac{1}{7}$$