$$\underbrace{\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k}_{\text{serie}}$$

a_k termine generale della serie

$S_n = \sum_{k=k_0}^{n} a_k$ successione delle somme parziali

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \begin{cases} S \in \mathbb{R} & \text{serie converge} \\ \infty & \text{serie diverge} \\ \nexists & \text{serie è indet.} \end{cases}$$

- COND. NEC serie convergenti

se $\sum a_k$ è conv $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

o equiv se $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow$ la serie non conv.

① serie a termini positivi : $a_k \geq 0 \ \forall\, k \geq k_0$
- non possono essere indeterminate
- Criterio del confronto
- Criterio del confronto asintotico
- criterio del rapporto
- criterio della radice

② serie a segno alterno $a_k = (-1)^k b_k$ con $b_k > 0$
- Criterio di Leibniz

③ serie con termini di segno qualsiasi
- criterio della conv. assoluta

$$\sum_{k=2}^{\infty}\underbrace{(-1)^k\boxed{\frac{7k+1}{k^2+1}\cdot\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}}_{a_k}$$ studiare il carattere

$b_k > 0$

È una serie a segni alterni, provo a vedere se posso applicare Leibniz.

Devo verificare 1) $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$

$$\lim_{k\to+\infty}\underbrace{\frac{7k+1}{k^2+1}}_{\sim\frac{7}{k}}\cdot\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{\sim\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{7}{k^2} = 0$$

la 1ª ip di Leibniz è verificata

2ª ip: dovrei verificare che b_k è decresc.

è un po' complicato

⇒ abbandono Leib e lavoro come se la serie fosse di segno generico e studio $\sum |a_k|$

$$\sum_{k=2}^{\infty}|a_k| = \sum_{k=2}^{\infty}\left|(-1)^k\frac{7k+1}{k^2+1}\cdot\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right|$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{7k+1}{k^2+1}\cdot\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$$ questa serie è a t.p.

posso applicare i criteri per le serie a t.p., in particolare confronto asintotico

$$|a_k| = \frac{7k+1}{k^2+1}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) \sim \frac{7}{k}\cdot\frac{1}{k} = \frac{7}{k^2} = b_k$$ per $k\to\infty$

∞

$|a_k| \sim b_k$ (entrambi > 0)

per il criterio del conf asint. $\sum |a_k| \sim \sum b_k$

ma $\sum b_k = \sum \frac{7}{k^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{criterio di} \\ \text{linearità}}}{=} 7 \sum \frac{1}{k^2}$ è converg (serie armonica generaliz. con $\lambda = 2 > 1$)

Allora converge anche $\sum |a_k|$, cioè la serie data converge assolutamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \qquad\qquad a_n = \frac{e^n}{n!} > 0 \quad \forall\, n \geq 0$$

serie a segni strett. positivo.

? criterio del rapp. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{e}{\cancel{e^{n+1}}}}{\underbrace{(n+1)!}_{(n+1)\cancel{n!}}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{e^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0 = \ell < 1 \Rightarrow \text{la serie converge}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \not\Longleftrightarrow \lim a_n = 0$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} 3^n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}}_{a_n \geq 0}$$

$$a_n = 3^n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\overset{n\cdot n}{\boxed{n^2}}} = \left(3\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right)^n$$

$$? \quad \ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\left(3\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right)^{\cancel{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \boxed{3} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = 3 \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n = 3\cdot e^{-2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a \qquad \ell = \frac{3}{e^2} < 1$$

$\Rightarrow$ per il criterio della radice
la serie converge

- $$\sum_{n=2}^{\infty} \boxed{\frac{(4n+1)+2^{-n}}{n\cdot\log n+\operatorname{arctg}(n!)}} = a_n > 0 \quad \forall n \geq 2$$

serie a t.p.

$$2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ succ geom.}$$

numeratore $\underbrace{(4n+1)}_{\to +\infty} + \underbrace{2^{-n}}_{\to 0} \sim 4n+1 \sim 4n$ per $n \to \infty$

denom. $\underbrace{n\log n}_{\to +\infty} + \underbrace{\operatorname{arctg}(n!)}_{\to \frac{\pi}{2}} \sim n\cdot\log n$ per $n \to \infty$

$$a_n \sim \underbrace{\frac{4\cancel{n}}{\cancel{n}\log n}}_{b_n} \quad \text{per } n \to \infty$$

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=2}^{\infty} b_n$ per il criterio del conf. asint.

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{\log n} = 4\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^0 \log n}$$ diverge

$\alpha = 0$

$\beta = 1$

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$$

conv se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$

o $\alpha > 1$ $\forall \beta$

div altrimenti

Siccome $\sum b_n$ diverge

$\Rightarrow$ diverge $\sum a_n$

per il criterio del

conf. asintotico

- $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\sqrt[n]{\frac{5}{4}}}$ non è serie geom $\sum_{n=0} q^n$

$$a_n = \left(\frac{5}{4}\right)^{1/n}$$

Calcolo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^{\boxed{1/n} \to 0} = 1 \neq 0$

- per la cond nec delle serie conv ⇒ la serie non può convergere

osservo che $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$ cioè la serie è a t.p., e quindi non può essere indet

⇒ la serie data diverge

- $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\sin n}{\sqrt{n^4+1}+n}}$ a_n è a segno qualsiasi

penso alla conv. assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{\left|}\frac{|\sin n|}{\sqrt{n^4+1}+n}\cancel{\right|}$$

Ricordo $|\sin n| \leq 1$

$$\underbrace{\frac{|\sin n|}{\sqrt{n^4+1}+n}}_{|a_n|} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n}}_{b_n}$$ criterio del confronto

$\sum b_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n}$ è a t.p.

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to +\infty$$

per il criterio del conf. as.

$$\sum b_n \sim \sum \frac{1}{n^2}$$

conv $\Leftarrow$ converge

$\sum b_n$ conv e $\sum |a_n| \leq \sum b_n$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto, converge anche

- $\sum |a_n|$ cioè la serie data conv. assolutam.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7n)^n}{(2n)!}} \quad a_n > 0$$

applico criterio del rapporto

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(7(n+1))^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(7n)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{7}{\cancel{7^{n+1}}}\,(n+1)^{n+1} \cdot \cancel{(2n)!}}{\underset{(2n+2)(2n+1)}{\cancel{(2n+2)!}}\;\cancel{7^n} \cdot n^n} =$$

$$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$$

$$= 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{\underline{(2n+2)}\,\underline{(2n+1)}\, n^n} = 7 \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\to e} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{n+1}{4n^2}}}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \ell = 0 < 1$$

Per il criterio del rapporto, la serie converge

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+3}{n^{7/2}+\log n}$ $\quad a_n>0 \quad \forall n \geq 1$

  serie a t.p.

$$a_n = \frac{n^2+n+3}{n^{7/2}+\log n} \sim \frac{n^2}{n^{7/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\sum a_n \sim \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ serie armonica gen con $\lambda = \frac{3}{2} > 1$ converg.

$$\text{conv} \underset{\uparrow}{\Longleftarrow} \text{conv}$$

per il criterio del conf. as.

- $\sum_{n=2}^{\infty} \left[1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right] n^{3/2}$

$0<\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}<1 \Rightarrow 1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}>0$

$n^{3/2}>0 \quad \Rightarrow a_n>0$ serie a t.p.

$$\begin{tikzcd}
\left[1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right] n^{3/2} & \leq & n^{3/2} \arrow[d] \\
? & \Longleftarrow & \sum n^{3/2} \text{ div}
\end{tikzcd}$$

$$\sqrt{1-\frac{2}{n^2}} = \left(1+\underbrace{\left(-\frac{2}{n^2}\right)}_{x\to 0}\right)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left[1-\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right] = \cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sim \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n\to\infty$$

$$\sum_1 a_n \sim \sum_1 \frac{1}{n^2}\,n^{3/2} = \sum_1 \frac{1}{n^{1/2}}$$

serie armonica gen.
con $\lambda = \frac{1}{2} < 1$

serie divergente

per il criterio del conf. asintotico $\Rightarrow$
diverge anche la serie data.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^4+1}+n}$

Compito

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)\cdot\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{1/2}$