- $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

studiare $f(x)$ e disegnare il grafico di $f(x)$ utilizzando tutte le informazioni fino alla derivata prima.

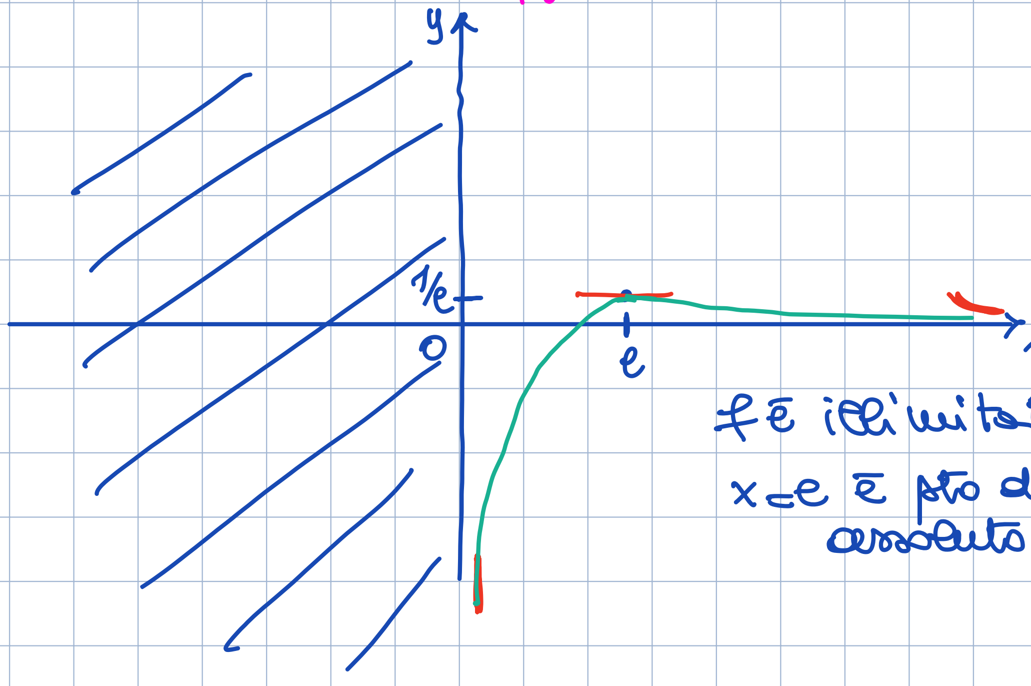
1) $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$

2) simmetrie : dom non simmetrico $\Rightarrow$ non potremo avere simmetrie

3) limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{\overbrace{\log x}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = -\infty$ $\quad x = 0$ è as verticale destro

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\overbrace{\log x}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}} = 0^+$ $\quad y = 0$ è as. orizz destro



f è illimitata inferiormente

x = e è pto di max assoluto

4) f è cont sul suo dom perché rapporto di funz elem continue

5) calcolo $f'(x)$

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$\left[\left(\frac{N}{D}\right)' = \frac{N' \cdot D - N \cdot D'}{D^2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x) \cdot 1}{x^2} =$$

$$D(\log x) = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$\text{dom}(f') = (0, +\infty) \equiv \text{dom}(f)$

$\text{dom}(f') \equiv \text{dom}(f) \Rightarrow$ f è deriv in tutti i punti di dom(f) e non esistono punti di non derivabilità

6) cerco i punti stazionari

$?x : f'(x) = 0$ $\quad f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \log x = 0$

$\Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow x = e$ pto stazionario

valuto $f(e) = \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e}$

7) studio la crescenza e decrescenza di f guardando il segno di $f'(x)$

$?x : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \log x}{x^2} \geq 0$

$N = 1 - \log \geq 0 \Leftrightarrow \log x \leq 1 \Leftrightarrow e^{\log x} \leq e^1$

$x \leq e$

$D > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$ è vero $\forall x \in \text{dom}(f)$

		0		e	
N			+	0	−
D			+		+
f'			+	0	−
f			↗		↘

f è crescente in $(0,e)$ e decrescente in $(e,+\infty)$

$x=e$ è punto di max relativo

Analizzando il grafico deduco informazioni sui punti di estremo assoluto. In particolare $x=e$ è pto di max ass, mentre $\nexists$ pti di min assoluto perché f è illimitata inferiormente.

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{1/x} & \text{se } x<0 \\ 2\sin x & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

ben definita $\forall x<0$

ben definita $\forall x\geq 0$

$2e^{1/x}$ | 0 | $2\sin x$

1) $dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

2) simmetrie: NO perché le espressioni di f sono $\neq$ per $x<0$ e $x>0$

3) limiti agli estremi del dominio e eventuali asintoti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2e^{\overset{\to 0^-}{1/x}} = 2$$ ($e^{1/x} \to 1$)

$y=2$ è as. orizz sx

se $x\to-\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^- \Rightarrow e^{1/x} \to 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\sin x = \nexists$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 2e^{\overset{\to -\infty}{1/x}} = 0$$ ($e^{1/x} \to 0$)

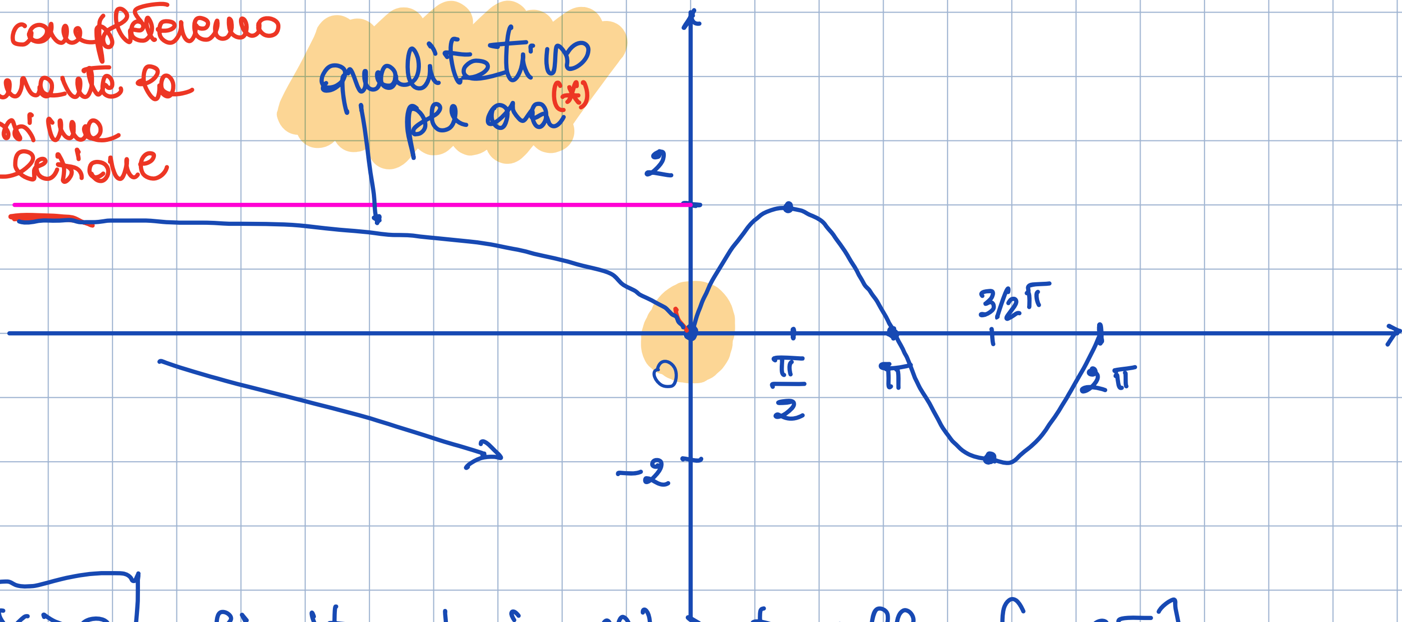
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\sin x = 0$

$f(0) = 2\cdot \sin 0 = 0$

$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

cioè f è cont in $x=0$

(*) completeremo durante la prossima lezione



$\boxed{x>0}$ limitandoci all'intervallo $[0, 2\pi]$

$x = \frac{\pi}{2}$ è pto staz di max rel

$x = \frac{3}{2}\pi$ pto staz di min rel

f è cresc $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$

decresc in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$

$\boxed{x<0}$ $f(x) = 2e^{1/x}$

$D\left(\frac{1}{x}\right) = D(x^{-1})$

$f'(x) = 2\cdot e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2} e^{1/x}$

$= -1\cdot x^{-2}$

$= -\frac{1}{x^2}$

dom(f') limitatamente a $x<0$

$= (-\infty, 0)$

- $f'(x) = 0$ $\quad -\frac{2}{x^2} e^{1/x} = 0$ mai perché l'exp è sempre $\neq 0$

non esistono pti stazionari

- $f'(x) \geq 0 \qquad -\frac{2}{x^2}e^{1/x} \geq 0$

$e^{1/x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi anche per $x<0$

$x^2 > 0 \quad \forall x<0$

$-\frac{2}{x^2}e^{1/x} < 0 \quad \forall x<0$

		0
f'	$-$	
f	$\searrow$	

f è decrescente in $(-\infty, 0)$

Termineremo lo svolgimento la prossima lezione, dobbiamo capire bene cosa succede in un intorno di 0.

8/11/24

Studio la derivabilità in $x=0$

$$f(x)=\begin{cases} 2e^{1/x} & x<0 \\ 2\sin x & x \geq 0 \end{cases}$$

$f'_+(0) \qquad f'_-(0)$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x - 0}{x-0} = 2$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2e^{1/x} \cancel{-0}}{x} \underset{(*)}{=} \frac{0}{0}$$

$e^{1/x} \to 0^+$

se $x \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{1/x} \to 0^+$

Sostituzione: $t = e^{1/x}$ se $x \to 0^- \Rightarrow t = e^{1/x} \to 0^+$

$$(*) = \lim_{t \to 0^+} 2t \cdot \log t = 0$$

$$\frac{2e^{1/x}}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{1/x}$$

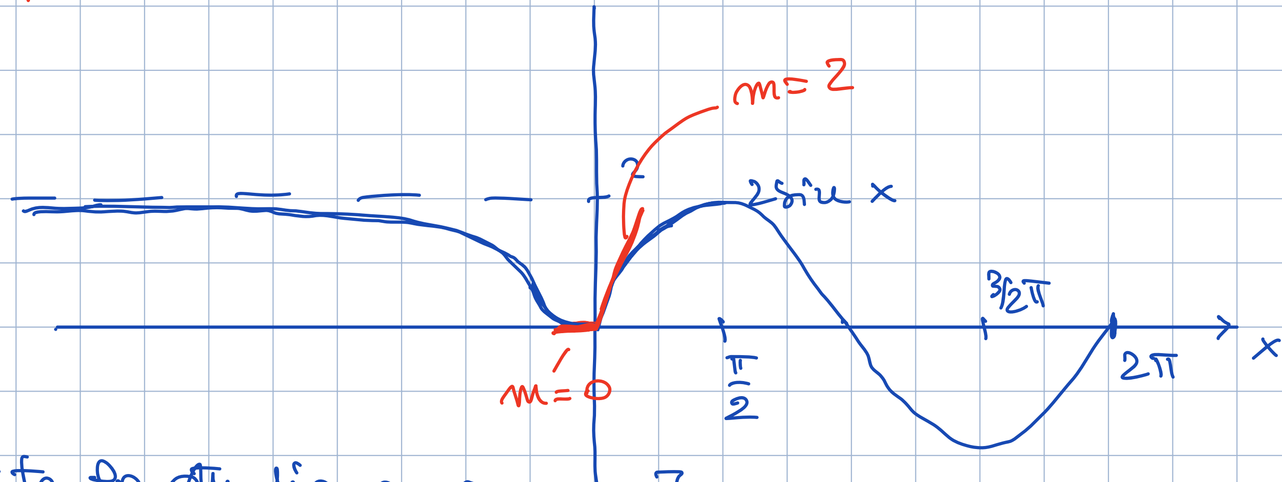
$$\frac{1}{x} \qquad \log_e t = \log_e e^{1/x} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'_-(0) = 0$$

$$f'_-(0) = 0 \qquad f'_+(0) = 2$$

$x = 0$ è pto angoloso

f non è deriv in $x = 0$



limito lo studio a $[-\infty, 2\pi]$

$x = \frac{3}{2}\pi$ è pto di min assoluto

$x = \frac{\pi}{2}$ è pto di max assoluto

$x = 0$ è pto ang e di min relativo

Thm di Rolle

Ip: • f cont su $[a,b]$ chiuso e limitato
• f deriv su (a,b)
• $f(a)=f(b)$

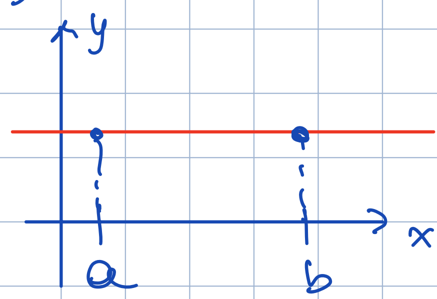
Ts: $\exists c \in (a,b)$ t.c. $f'(c)=0$

Dim

Per il thm di Weierstrass f è limitata su $[a,b]$ e ammette max e min (assoluti).

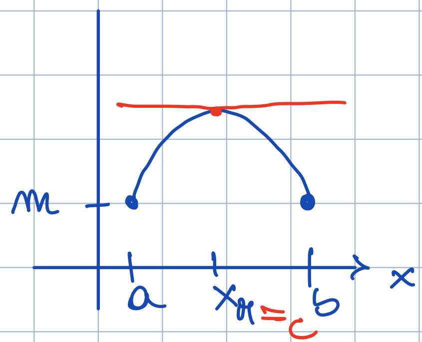
$$M=\max_{a\le x\le b} f(x) \qquad m=\min_{a\le x\le b} f(x)$$

caso 1) $f(a)\underset{\text{ipotesi}}{=}f(b)=m=M \longrightarrow$



$\Rightarrow f(x)$ è costante e
$f'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b)$
cioè $\exists \infty$ punti stazionari c e sono tutti i punti di (a,b)

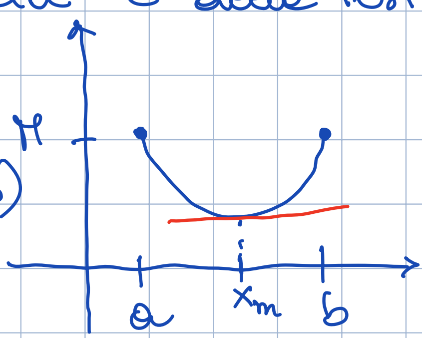
caso 2) $f(a)\underset{\text{ip.}}{=}f(b)=m\ne M$



$\Rightarrow x_M =$ pto di massimo $\in(a,b)$
$x_M\ne a$ e $x_M\ne b$

$\Rightarrow$ f è definita in un intorno completo di x_M, poi so che x_M è pto di max rel e f è deriv in x_M (per ipotesi). Cioè le ip del thm di Fermat sono verificate per il punto x_M. Per il thm di Fermat concludo che $f'(x_M)=0$ - Cioè c della tesi è x_M.

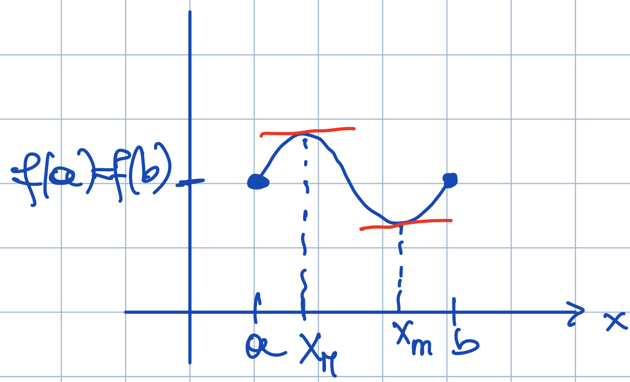
caso 3) $f(a)=f(b)=M\ne m$



$\Rightarrow x_m =$ punto di minimo $\in(a,b)$

e ragionando come nel caso 2 si ha $f'(x_m)=0$, cioè $c=x_m$

caso 4) $f(a)=f(b) \neq m$
$\neq M$



sia x_m che $x_M \in (a,b)$, posso applicare il th.m di Fermat e concludere che
$f'(x_m)=0$, $f'(x_M)=0$, cioè c può essere x_m o x_M

c.v.d

Teo di Lagrange

Ip: • f cont su $[a,b]$ chiuso e limitato
• f deriv su (a,b)

Ts: $\exists\, c \in (a,b) : f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

retta

Dim. Definisco $h(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{funz dell'ip.}} - \boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)}$

Voglio applicare teo di Rolle ad $h(x)$. Per poterlo fare devo verificare che $h(x)$ soddisfi le ip del teo di Rolle.

- ? $h(x)$ è continua su $[a,b]$? sì perché $f(x)$ è continua per l'ip, mentre la retta è cont su tutto $\mathbb{R}$. La differenza di funz cont è cont.
- ? $h(x)$ è derivabile su (a,b)? sì perché $f(x)$ è deriv per ipotesi e la retta è deriv su $\mathbb{R}$. La diff di funz derivabili è derivabile
- ? $h(a) = h(b)$

$\rightarrow h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$

valuto $h(a) = f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\cancel{(a-a)} = f(a)$

valuto $h(b) = f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cdot\cancel{(b-a)} = f(a)$

Ho trovato $h(a) = h(b) \Rightarrow h(x)$ soddisfa le ip del teo di Rolle e quindi è vera anche la tesi del teo di Rolle, cioè $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $h'(c) = 0$.

Devo calcolare $h'(x)$

$f(x) = 3(x-2)$

$f'(x) = 3$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dire che $\exists c : h'(c) = 0$ equivale a dire

che $$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

ovvero

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

c.v.d.