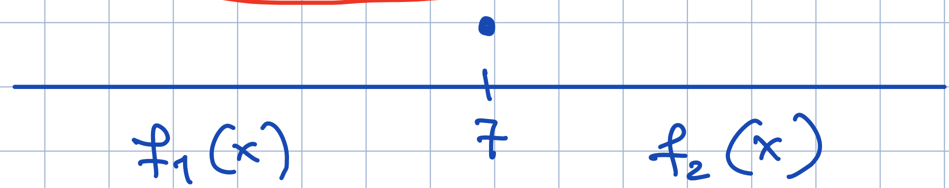
Esercizi su limiti e continuità

Studiare la continuità di $f(x)$ nel suo dominio.

(1)

$$f(x)=\begin{cases} \underbrace{(x-7)\cdot\cos\left(\frac{1}{x-7}\right)}_{f_1(x)} & \text{se } x<7 \\ 1 & \text{se } x=7 \\ \underbrace{\frac{\cos(x-7)-1}{(x-7)^2}+\frac{1}{2}}_{f_2(x)} & \text{se } x>7 \end{cases}$$



? $\mathrm{dom}(f)$: $f_1(x)$ è ben definita $\forall x<7$

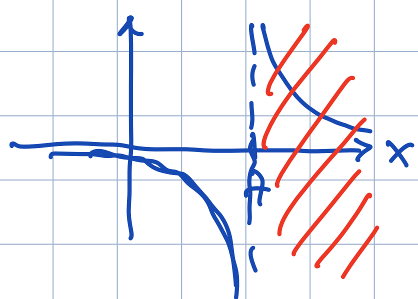
$f_2(x)$ è ben definita $\forall x>7$

$\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}$

$\boxed{x<7}$ $\quad f_1(x)=\underbrace{(x-7)}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x-7}\right)}$

$(x-7)$ retta cont su tutto $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ anche in $(-\infty,7)$

$\frac{1}{x-7}$



è cont in $(-\infty,7)$

$\cos(y)$ è cont su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\cos\left(\frac{1}{x-7}\right)$ è cont

perché composizione di funz cont

$\boxed{x > 7}$ $\quad f_2(x) = \dfrac{\cos(x-7) - 1}{(x-7)^2} + \dfrac{1}{2}$

$(x-7)^2$ parabola cont su $\mathbb{R}$ e quindi anche su $(7, +\infty)$

$\cos(x-7)$ compos. di funz cont

$f_2(x)$ è continua perché somma / prodotto / divisione / sottrazione e composizione di f. continue

$\boxed{x = 7}$ ricordo che f è cont in x_0 (con x_0 pto di acc per il dom) sse

$$\left[\ell_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)\right] = \left[\ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)\right] = f(x_0)$$

- $\displaystyle \lim_{x \to 7^-} f(x) = \lim_{x \to 7^-} (x-7) \cos\left(\frac{1}{x-7}\right) =$

$y = x-7$

se $x \to 7^- \Rightarrow y \to 0^-$

$$= \lim_{y \to 0^-} \underset{\downarrow \, 0}{y} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{y}\right)}_{\substack{\nexists \text{ limite} \\ \text{ma è limitata}}} = 0$$

(per il coroll al 2° teor del confronto)

$\boxed{\ell_1 = 0}$

- $\displaystyle \lim_{x \to 7^+} f(x) = \lim_{x \to 7^+} \frac{\cos(x-7) - 1}{(x-7)^2} + \frac{1}{2} = \lim_{y \to 0^+} \left[\frac{\cos(y) - 1}{y^2} + \frac{1}{2}\right]$

$y = x-7$

se $x \to 7^+ \Rightarrow y \to 0^+$

$$= \lim_{y\to 0^+}\left[-\frac{1-\cos y}{y^2}+\frac{1}{2}\right]=$$

$$\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\right]$$

vedere esercito 2.

$$= \lim_{y\to 0^+} - \frac{1-\cos y}{y^2} + \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$$

$$\boxed{l_2 = 0}$$

$$l_1 = l_2 = 0$$

- $f(7) = 1$

$x=7$ pto di disc eliminabile

f è cont su tutto $\mathbb{R}\setminus\{7\}$

---

(2)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3(x-1)}{\log\left(1+(x-1)^2\right)\sqrt{x-1}} & x>1\\ e^{\frac{x-2}{(x-1)^2}}+1 & x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

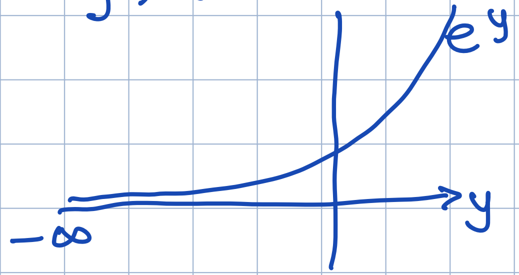
$\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}$

per $x\neq 1$ f è cont perché $+,-,\cdot,/,$ compos. di f. cont.

Studio in $x=1$ la cont.

- $$l_1=\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[e^{\frac{x-2}{(x-1)^2}}+1\right]=$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \left(e^y + 1\right) = 0 + 1$$



$$y = \frac{\overbrace{x-2}^{\to -1}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to 0^+}}$$

se $x \to 1^- \Rightarrow y \to \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$$\boxed{\ell_1 = 1}$$

- $\ell_2 = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin^3(x-1)}{\log\left(1 + (x-1)^2\right)\sqrt{x-1}} =$

$$\underset{\substack{y = x-1 \\ x \to 1^+ \Rightarrow y \to 0^+}}{=} \lim_{y \to 0^+} \frac{\overbrace{(\sin^3 y)}^{\sim y^3}}{\underbrace{\boxed{\log(1+y^2)}}_{\sim y^2}\sqrt{y}} = \cancel{\frac{0}{0}} \quad (*)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \sin x \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

$\sin^3 y \sim y^3$ per $y \to 0$

$\sin^3 y = (\sin y)^3$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \iff \log(1+x) \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

$\Rightarrow \log(1+y^2) \sim y^2$ quando $y^2 \to 0$

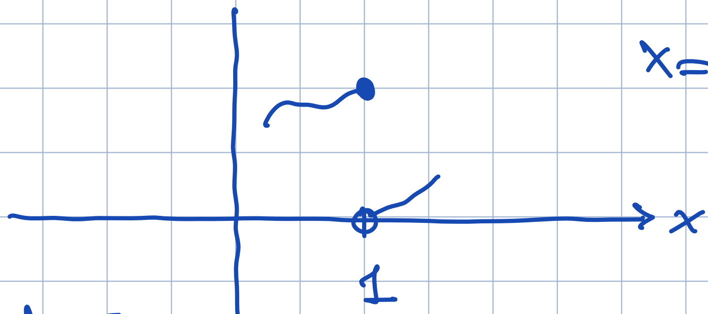
$\equiv y \to 0$

$$(*) = \lim_{y \to 0^+} \frac{y^3}{y^2 \cdot y^{1/2}} = \lim_{y \to 0^+} y^{1/2} = 0$$

$y^{1/2}$

$\ell_2 = 0$

$\ell_1 = 1 \qquad \ell_2 = 0 \qquad f(1) = 1$



$x=1$ è pto di salto

f è continua da sx

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{[(x-2)^2]} & \text{se } x \leq 2 \\ 1 + (x-2)^{[(x-2)^4]} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

studio cont in $x=2$

- $$\ell_1 = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \underbrace{2e^{[(x-2)^2]}}_{\text{è cont su } \mathbb{R}} \overset{}{\underset{\Uparrow}{=}} f(2) = 2$$

- $$\ell_2 = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 1 + (x-2)^{[(x-2)^4]} \underset{y = x-2}{=}$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \left(1 + y^{(y^4)}\right) = 1 + \lim_{y \to 0^+} y^{(y^4)} =$$

$$= 1 + \lim_{y \to 0^+} e^{\log y^{(y^4)}} = 1 + \lim_{y \to 0^+} e^{y^4 \log y} =$$

$$= 1 + e^0 = 2$$

$\ell_1 = \ell_2 = f(2) \Rightarrow f$ è continua in $x = 2$.