21/10/24

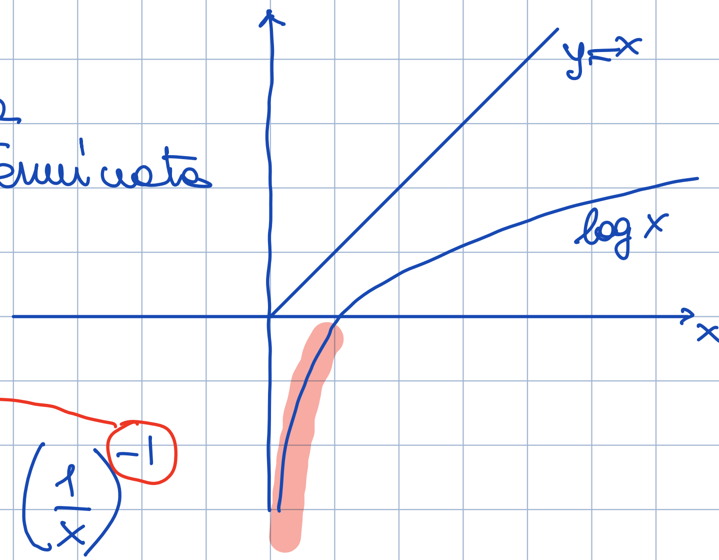
$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

- $x \to 0$
- $\sin \frac{1}{x}$ non ha limite per $x \to 0$, ma è una funzione limitata $\left(-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1\right)$
- ho una funz infinitesima $\overset{\text{per } x \to 0}{\left(f(x) = x\right)}$ e una funzione limitata in un intorno di $x_0 = 0$, per il corollario al 2° thm del confronto

$\Rightarrow$ il prodotto delle due funz è infinitesimo.

- $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \;\; \nexists$ e $\nexists \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} \cdot \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{limitata } (\nexists \lim)} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \underbrace{x^{\alpha}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \;\; \forall \alpha > 0}} \sin \frac{1}{x} = 0 \qquad \forall \alpha > 0$
- $\lim_{x \to 0} x^{\alpha} \cos \frac{1}{x} = 0 \quad \forall \alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{0^+} \cdot \underbrace{\log x}_{-\infty} = 0\cdot\infty$$ forma indeterminata



$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot \log\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\log \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} -\frac{\log y}{y} =$$

$$x = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$$

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$\log a^b = b\cdot \log a$$

$$y = \frac{1}{x}$$

se $x\to 0^+$, $y=\frac{1}{x} \to +\infty$

$$= \lim_{y\to +\infty} (-1)\cdot \frac{\log y}{y} \overset{AL}{=} \underbrace{\lim_{y\to +\infty} (-1)}_{-1} \cdot \underbrace{\lim_{y\to +\infty} \frac{\log y}{y}}_{0^+} = 0^-$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\cdot \log x = 0^-}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\cdot \log x = 0^- \quad \forall\, \alpha > 0}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

- $$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

$\uparrow$

$y=\frac{1}{x}$ se $x\to 0^+ \Rightarrow y\to+\infty$

Con un'altra sostituzione si dimostra che

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

quindi come prima $\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x} = e$

(applico ancora $y=\frac{1}{x}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$\log a^b = b\log a$

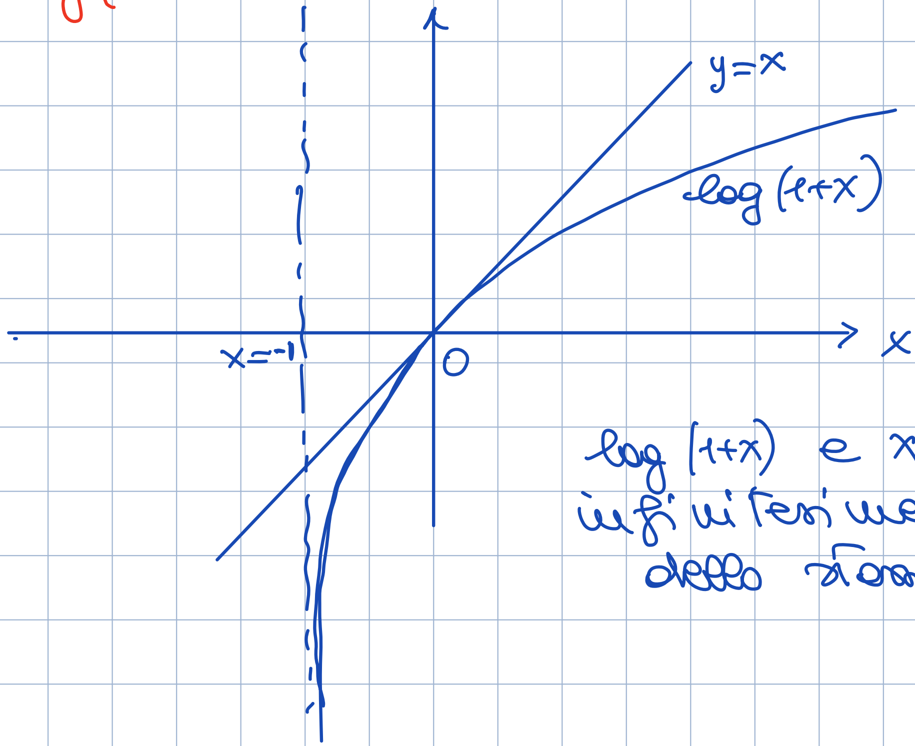
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log(1+x) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{1/x} = \log\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) =$$

$$= \log(e) = 1$$

Quando $x\to 0$, $\log(1+x)$ e x stanno comportandosi allo stesso maniera, cioè

$\log(1+x) \sim x$ quando $x \to 0$

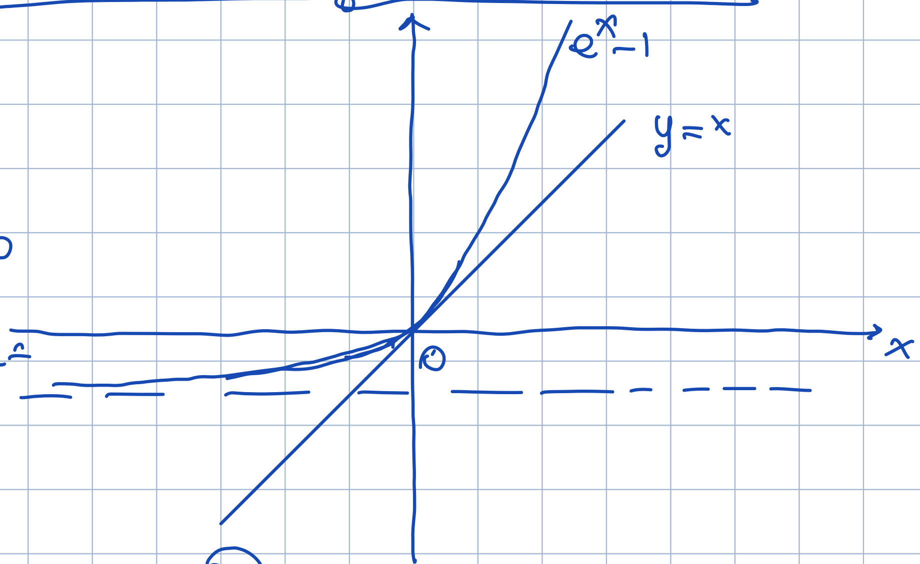


$\log(1+x)$ e x sono infinitesime dello stesso ordine

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

sono funzioni infinitesime con lo stesso ordine di as-simo



$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} \overset{(*)}{=}$$

$y = e^x - 1$ $\quad y + 1 = e^x \quad \log(y+1) = \log e^x = x$

se $x \to 0 \Rightarrow y = e^x - 1 \to 0$

$$(*) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\log(1+y)}{y}} \underset{AL}{=} \frac{\lim_{y\to 0} 1}{\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$