04/10/2024

Dimostrare che $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$

$$\overline{e^{i\theta}} \underset{\text{Eulero}}{=} \overline{(\underbrace{\cos\theta}_{x} + i\underbrace{\sin\theta}_{y})} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) =$$

se $z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy$

$-\sin\theta = \sin(-\theta) \iff \sin\theta = -\sin(-\theta)$

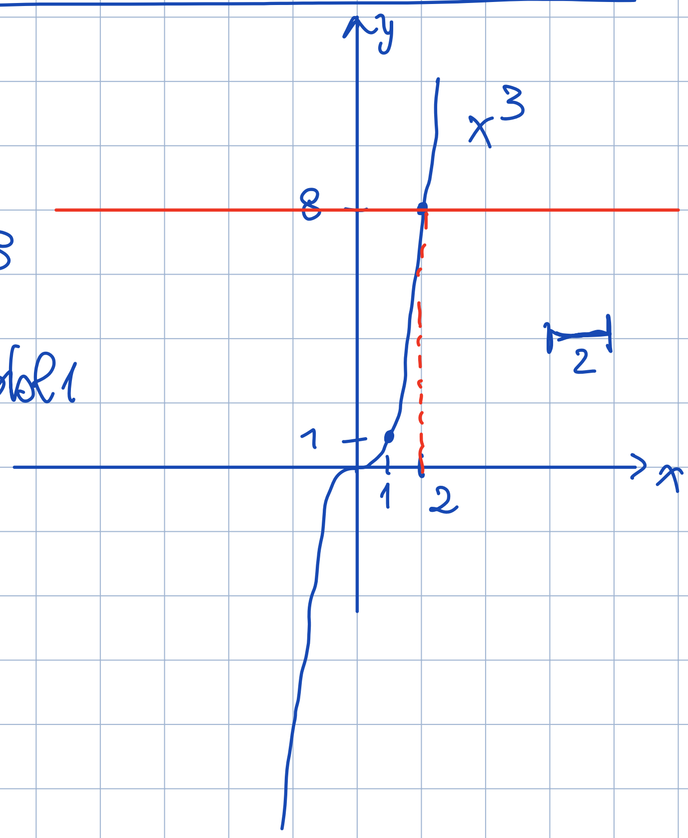
$\cos\theta = \cos(-\theta)$

$= e^{-\theta i}$

Radici in $\mathbb{C}$

prob 1. $? \; x \in \mathbb{R} : x^3 = 8$

$\exists! \; x = 2$ sol del pbl 1



pbl 2 $\quad ? \; z \in \mathbb{C} : z^3 = 8$.

Mostro ora che questo problema ha più soluzioni distinte, a differenza di quanto trovato in $\mathbb{R}$.

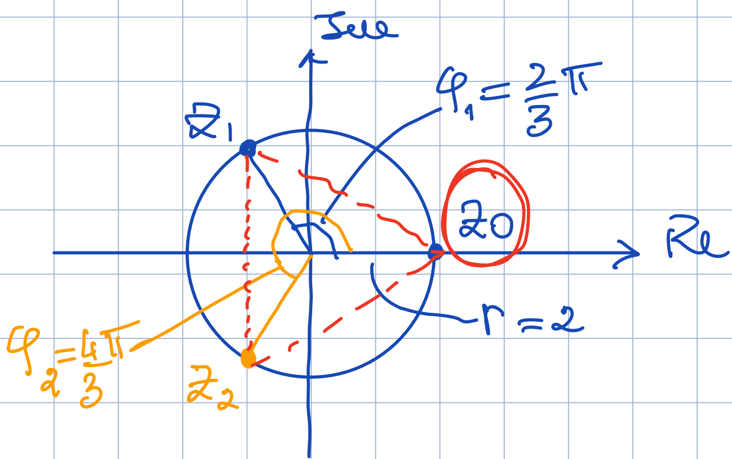
• $z_0 = 2 = 2+0i \in \mathbb{C}$ $z_0^3 = 8$,

z_0 soddisfa l'eqz $z^3=8$, quindi $z_0=2$ è una radice complessa terza di 8

• $z_1 = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}$ $z_1^3 = \left(2e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^3 = 8\cdot e^{i\frac{2}{\cancel{3}}\pi\cdot\cancel{3}} = 8\underbrace{e^{i2\pi}}_{1}$

z_1 soddisfa l'eqz $z^3=8$

z_1 è una radice complessa terza del numero $w=8$



Anche z_1 è radice complessa terza di 8.

• $z_2 = 2e^{i\frac{4}{3}\pi}$ $z_2^3 = \left(2\cdot e^{i\frac{4}{3}\pi}\right)^3 = 8\cdot e^{i\frac{4}{\cancel{3}}\pi\cdot\cancel{3}} = 8\overbrace{e^{i4\pi}}^{1}$

anche z_2 è radice complessa terza di 8

Le 3 radici sono i vertici di un tr. equilatero inscritto nella cf di centro l'origine e raggio 2

Teorema. Ogni numero complesso non nullo w ha esattamente n radici complesse n-sime distinte, ovvero l'equazione $z^n = w$ ha n soluzioni distinte complesse. Inoltre, se $w = \rho e^{i\vartheta}$, le n radici n-sime di w hanno la forma: $z_k = r \cdot e^{i\varphi_k}$,

$$\text{dove } r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{e} \quad \varphi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dati: w, n

Sol: $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$: $z_k^n = w$

Procedimento: 1 – $w = \rho e^{i\vartheta}$ (riscrivo w in forma exp)

2 – calcolo $r = \sqrt[n]{\rho}$

3 – calcolo $\varphi_0 = \frac{\vartheta}{n}$ $\rightarrow$ $z_0 = r \cdot e^{i\varphi_0}$

4 – calcolo $\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{2\pi}{n}$ $\rightarrow$ $z_1 = r \cdot e^{i\varphi_1}$

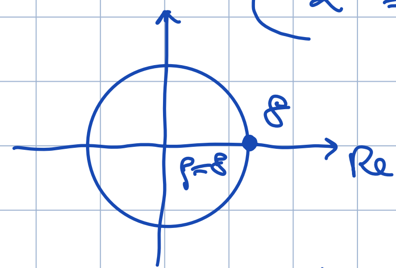
5 – calcolo $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2\pi}{n}$ $\rightarrow$ $z_2 = r \cdot e^{i\varphi_2}$

? Calcolare le radici complesse di $z^3=8$

$(z^n = w)$

$n=3$, $w=8$

1 — $w=\rho e^{i\theta} = 8\cdot e^{i0}$ $\quad \rho=8$, $\theta=0$



2 — $r=\sqrt[n]{\rho}=\sqrt[3]{8}=2$ (modulo delle radici z_k)

3 — calcolo $\varphi_0=\frac{\theta}{n}=0 \to z_0=r\cdot e^{i\varphi_0}=2\cdot e^{i0}=2$

4 — $\varphi_1=\varphi_0+\frac{2\pi}{n}=0+\frac{2\pi}{3} \to z_1=r\cdot e^{i\varphi_1}=2\cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}$

5 — $\varphi_2=\varphi_1+\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi \to z_2=re^{i\varphi_2}=2e^{i\frac{4}{3}\pi}$

Attenzione: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ possono essere calcolati in maniera del tutto equivalente a quanto fatto sopra con la formula $\varphi_k=\frac{\theta+2k\pi}{n}$ per $k=0,\dots,n-1$

Infatti abbiamo:

$$\varphi_0=\frac{\theta+2\cdot 0\cdot\pi}{n}=\frac{0}{3}=0 \quad (k=0)$$

$$\varphi_1=\frac{\theta+2\cdot 1\cdot\pi}{n}=\frac{0+2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi \quad (k=1)$$

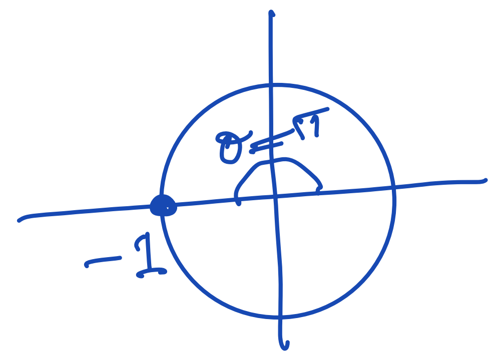
$$\varphi_2=\frac{\theta+2\cdot 2\cdot\pi}{n}=\frac{0+4\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi \quad (k=2)$$

Esercizio d'esempio

Risolvere l'equazione $z^3 + 8 = 0$ in $\mathbb{C}$. $\longrightarrow \quad z^3 = -8$

$n = 3 \qquad w = -8 = \underbrace{\rho}_{>0} \cdot e^{i\theta}$

$-8 = \underbrace{8}_{\rho} \cdot \underbrace{(-1)}_{e^{i\theta}} = 8 \cdot e^{i\pi} \qquad \theta = \pi$



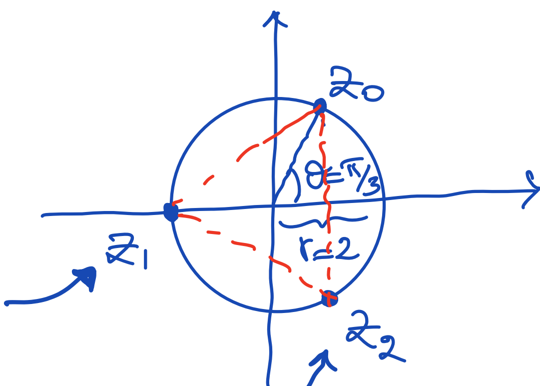
$\rho = 8 \qquad \theta = \pi$

1 – $r = \sqrt[n]{\rho} = \sqrt[3]{8} = 2$

2 – $\varphi_0 = \dfrac{\theta}{n} = \dfrac{\pi}{3} \rightarrow z_0 = 2 \cdot e^{i\pi/3}$

3 – $\varphi_1 = \varphi_0 + \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = \pi \rightarrow z_1 = r \cdot e^{i\varphi_1} = 2 \cdot e^{i\pi}$

4 – $\varphi_2 = \varphi_1 + \dfrac{2\pi}{n} = \pi + \dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{5}{3}\pi \rightarrow z_2 = r \cdot e^{i\varphi_2} = 2 \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi}$



$? \, z \in \mathbb{C} : \quad z^4 + z = 0$

$$z \cdot (z^3+1) = 0 \iff z = 0 \;\; \text{o} \;\; \underbrace{(z^3+1) = 0}_{\downarrow}$$

$$\begin{array}{ccc} z=0 & & (z^3+1)=0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ z_0 = 0 & \cup & z_1, z_2, z_3 \end{array}$$

da calcolare
con la
ricetta
delle radici