Vantaggi della pivotazione per righe

Esercizio

(espivot)
Si consideri il sistema lineare $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 0.5 \cdot 10^{-15} & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 5 + 0.5 \cdot 10^{-15} \\ 24 \\ 13 \end{pmatrix}$$

1. Risolvere il sistema dato con la fattorizzazione LU senza pivotazione (propria function) e stampare a video la soluzione ottenuta.
2. Risolvere il sistema dato con la fattorizzazione LU con pivotazione (propria function) e stampare la soluzione a video.
3. Sapendo che la soluzione esatta del sistema è il vettore $\mathrm{x} = [1, 1, 1]^T$, commentare i risultati ottenuti.

Soluzione

1. Richiamando la propria function (LU senza pivotazione), si ottiene:

```
x =
    -4.000000000000003e+00
     6.000000000000000e+00
     1.000000000000000e+00
```

molto lontana dalla soluzione esatta del sistema.
Si ha:

```
xex=ones(3,1);
err=norm(x-xex)/norm(xex)
err =
     4.082482904638631e+00
```

cioè un errore relativo del 408%.

Richiamando la fattorizzazione LU con pivotazione

```
[L,U,P]=lufact(A,1);
```

risolvere i sistemi

$$\begin{cases} Lz = Pb \\ Ux = z \end{cases}$$

La soluzione è:

```
x =
      1.000000000000002e+00
      9.999999999999991e-01
      1.000000000000000e+00
```

L'errore relativo ora è:

```
err=norm(x-xex)/norm(xex)
err =
      1.146633409319802e-15
```

pari a $10^{-13}\%$.

Commenti.

La fattorizzazione LU arriva a terminazione anche senza pivotazione, tuttavia gli errori di arrotondamento si propagano in maniera disastrosa.

Avevamo detto che i responsabili della propagazione degli errori di arrotondamento sono i moltiplicatori

$$\ell_{ik} = A_{ik}/A_{kk}$$

che nella fattorizzazione LU sono memorizzati nella matrice L.

Si generano i seguenti moltiplicatori (stampare la matrice L nel primo caso):

$\ell_{21} = 2$, $\ell_{31} = 3$ e $\ell_{32} = -3.4e + 15$. ℓ_{32} è responsabile della forte propagazione degli errori.

```
L1 =
   1.0000e+00            0            0
   2.0000e+00   1.0000e+00            0
   3.0000e+00  -3.3777e+15   1.0000e+00
```

Quando si effettua la pivotazione invece si hanno i seguenti moltiplicatori: $\ell_{21} = 2/3$, $\ell_{31} = 1/3$ e $\ell_{32} = 1/2$, sono tutti minori di 1.

```
L =

   1.0000e+00            0            0
   6.6667e-01   1.0000e+00            0
   3.3333e-01   5.0000e-01   1.0000e+00
```

Quindi, anche se MEG e LU arrivano a terminazione senza pivotazione, è sempre meglio utilizzare la pivotazione. La pivotazione limita la propagazione degli errori di arrotondamento.

Pivotazione totale

L'istruzione `[L,U,P,Q]=lu(A);` esegue la pivotazione totale su A, L è triang. inf., U è triang. sup. mentre P e Q sono matrici di permutazione tali che

$$LU = PAQ.$$

P memorizza gli scambi di righe e Q di colonne. Si ha

$$A\mathrm{x} = \mathrm{b} \Leftrightarrow \underbrace{PAQ}_{LU}\,\underbrace{Q^{-1}\mathrm{x}}_{\mathrm{x}^*} = P\mathrm{b},$$

la soluzione del sistema $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ è quindi ottenuta attraverso la risoluzione di due sistemi triangolari e di una permutazione come segue

$$\begin{cases} L\mathrm{y} = P\mathrm{b} \\ U\mathrm{x}^* = \mathrm{y} \\ \mathrm{x} = Q\mathrm{x}^* \end{cases}$$