Metodo del Gradiente

Dati: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$:

$\mathbf{x}^{(0)}$ dato; $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$; $\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$; $k = 0$, $err = tol + 1$
while $k < kmax$ && $err > tol$
  calcolo $\alpha_k = \frac{(\mathbf{d}^{(k)})^T\mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{d}^{(k)})^T A\mathbf{d}^{(k)}}$
  calcolo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k\mathbf{d}^{(k)}$
  calcolo $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{d}^{(k)}$
  pongo $\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)}$;
  calcolo $err = \|\mathbf{r}^{(k+1)}\|/\|\mathbf{b}\|$
  $k = k + 1$
end

Scrivere la function `gradiente.m` con:
Input: `A, b, x0, tol, kmax`
Output: `x, res, k, resv`, dove: `res=`$\|\mathbf{r}^{(k)}\|/\|\mathbf{b}\|$, e `resv` è il vettore contenente $\|\mathbf{r}^{(k)}\|/\|\mathbf{b}\|$ per ogni $k \geq 0$.

Esercizio 1

Si risolva il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 3 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Sapendo che A è simmetrica e definita positiva, risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodi del Gradiente.
Prendere un vettore iniziale di numeri casuali `x0=rand(5,1)`, tolleranza `tol=1.e-12` e numero massimo di iterazioni `kmax=500`.
Rappresentare su un grafico in scala semilogaritmica la storia di convergenza del metodo (ovvero il vettore degli errori).

Metodo del Gradiente Coniugato

Dati: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{x}^{(0)} \quad \text{dato}; \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}; \mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} \\
k = 0, \ \ err = tol + 1 \\
\text{while } k < kmax \ \&\& \ err > tol \\
\quad \text{calcolo } \alpha_k = \frac{(\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{d}^{(k)})^T A\mathbf{d}^{(k)}} \\
\quad \text{calcolo } \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)} \\
\quad \text{calcolo } \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{d}^{(k)} \\
\quad \text{calcolo } \beta_k = \frac{(A\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k+1)}}{(\mathbf{d}^{(k)})^T A\mathbf{d}^{(k)}} \\
\quad \text{calcolo } \mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{d}^{(k)} \\
\quad \text{calcolo } err = \|\mathbf{r}^{(k+1)}\| / \|\mathbf{b}\| \\
\quad k = k + 1 \\
\text{end}
\end{array}
$$

Scrivere la function `gradiente_coniugato.m` con:
Input: `A, b, x0, tol, kmax`
Output: `x, res, k, resv`, dove: `res`=$\|\mathbf{r}^{(k)}\|/\|\mathbf{b}\|$, e `resv` è il vettore contenente $\|\mathbf{r}^{(k)}\|/\|\mathbf{b}\|$ per ogni $k \geq 0$.

Esercizio 2

Risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 3 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Sapendo che A è simmetrica e definita positiva, risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodo del Gradiente Coniugato.
Prendere un vettore iniziale di numeri casuali `x0=rand(5,1)`, tolleranza `tol=1.e-12` e numero massimo di iterazioni `kmax=500`.
Confrontare la storia di convergenza del metodo GC con quella del metodo del gradiente.