Calcolo del determinante di una matrice

Si sa che se $A = B \cdot C$, allora $det(A) = det(B) \cdot det(C)$.

Se voglio calcolare il $det(A)$ posso sfruttare la fattorizzazione LU.

$$\text{se } A = LU \quad \Rightarrow \quad det(A) = det(L) \cdot det(U).$$

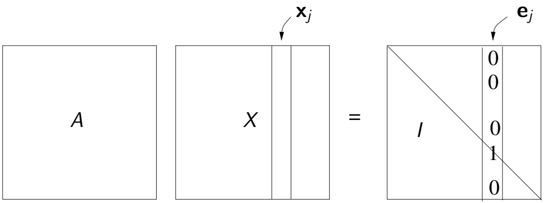
Poichè sia L che U sono triangolari, i loro determinanti sono dati dal prodotto degli elementi diagonali.
Sappiamo che $\ell_{ii} = 1$, quindi $det(L) = \ell_{11} \cdots \ell_{nn} = 1$ e quindi

$$det(A) = det(U) = u_{11} \cdots u_{nn}.$$

Per calcolare $det(A)$ non si applica la regola di Laplace (che ha un costo $\sim n!$ operazioni), ma si esegue la fattorizzazione LU ($\sim 2n^3/3$ operazioni)

Calcolo dell'inversa di una matrice

Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile, $?A^{-1} : \; AA^{-1} = I$
$X = A^{-1}$ è una matrice incognita.



Per la definizione di prodotto tra matrici

$$AX = I \Leftrightarrow A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \quad per\ j = 1, \dots, n$$

Per calcolare $X = A^{-1}$ devo risolvere n sistemi lineari tutti con la stessa matrice A e termini noti $\mathbf{e}_j$.

calcolo la fattorizzazione LU (con pivotazione) di A **UNA VOLTA SOLA**

for $j = 1 : n$

  pongo $\mathbf{b} = \mathbf{e}_j$

  risolvo $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$

  risolvo $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

  copio $\mathbf{x}$ nel vettore colonna $j - simo$ della matrice

end

Costo computazionale

Se A è una matrice senza struttura particolare (non è diagonale, non è triangolare, non è tridiagonale, ...), il calcolo di A^{-1} costa

$$\frac{2}{3}n^3 + n \cdot (2n^2) = \frac{8}{3}n^3 \text{operazioni elementari}$$

Esempio

Calcolare la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 20 & 20 & -1 \\ 3 & -6 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare il vettore $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

Ricordando che

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

per calcolare $\mathbf{x}$:

- **NON** serve calcolare A^{-1} (che costerebbe $\sim \frac{8}{3}n^3$ operazioni),
- **MA** basta risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con un costo al più di $\sim \frac{2}{3}n^3$ operazioni.