Risoluzione numerica di sistemi lineari quadrati

Dati: coefficienti a_{ij} per $i, j = 1, \dots, n$ e i termini noti $b_1, b_2, \dots, b_n$
Incognite: i valori $x_1, \dots, x_n$ che soddisfano il sistema di n equazioni lineari:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

o equivalentemente (in **forma matriciale**)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Esistenza e unicità di soluzione

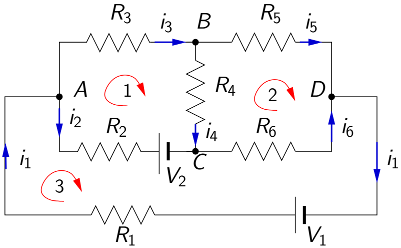
Teorema: $\exists !$ soluzione $\mathbf{x}$ del sistema quadrato $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di dimensione n se e solo:

1. $\det(A) \neq 0$,
2. $\exists A^{-1} : \; AA^{-1} = A^{-1}A = I$,
3. $rank(A) = n$ (le colonne (o le righe) di A sono lin. indip.),
4. $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Tutte queste condizioni sono equivalenti, nel senso che ognuna di queste implica ognuna delle altre: basta verificarne una per averle tutte soddisfatte.

Calcolare le intensità di corrente nei circuiti elettrici

Dati: le resistenze $R_1, \ldots, R_6$
e le fem V_1 e V_2
Incognite: le intensità di corrente
$i_1, \ldots, i_6$



Dobbiamo costruire **6 equazioni linearmente indipendenti** a partire dalle prime due *leggi di Kirchhoff*:

$$
\begin{cases}
\textit{Nodo } A: & -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\
\textit{Nodo } B: & -i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\
\textit{Nodo } C: & -i_2 - i_4 + i_6 = 0 \\
\textit{Maglia } 1: & -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 - V_2 = 0 \\
\textit{Maglia } 2: & R_5 i_5 - R_6 i_6 - R_4 i_4 = 0 \\
\textit{Maglia } 3: & R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_6 i_6 - V_1 + V_2 = 0
\end{cases}
$$

Dalle leggi di Kirchhoff al modello matematico

$$\left\{\begin{array}{l} -i_1+i_2+i_3=0\\ -i_3+i_4+i_5=0\\ -i_2-i_4+i_6=0\\ -R_2i_2+R_3i_3+R_4i_4-V_2=0\\ R_5i_5-R_6i_6-R_4i_4=0\\ R_1i_1+R_2i_2+R_6i_6-V_1+V_2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -i_1+i_2+i_3=0\\ -i_3+i_4+i_5=0\\ -i_2-i_4+i_6=0\\ -R_2i_2+R_3i_3+R_4i_4=V_2\\ R_5i_5-R_6i_6-R_4i_4=0\\ R_1i_1+R_2i_2+R_6i_6=V_1-V_2 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -R_2 & R_3 & R_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & -R_6\\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4\\ i_5\\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ V_2\\ 0\\ V_1-V_2 \end{bmatrix}$$

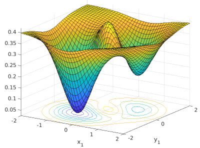
$$\Updownarrow$$

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

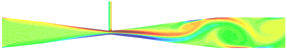
Dobbiamo risolvere un sistema lineare ogni volta che:

- si deve risolvere un problema di ottimizzazione in più variabili:

$$\min_{\mathbf{x}\in A\subset\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$



- si deve risolvere un sistema di eqz. diff. alle derivate parziali (per le previsioni del tempo, per la simulazione del moto di fluidi, per la dinamica di popolazioni, per simulare un terremoto,....)



- si deve risolvere un sistema di equazioni non lineari con il metodo di Newton o di Broyden (ad ogni iterazione...),

```
A = Jf(x);
b = -f(x);
z=A\ b;
xnew=z+x;
...
```

- ....

Metodi diretti e metodi iterativi

Diretti	**Iterativi**
Modificano A e $\mathbf{b}$ in modo che si arrivi ad un sistema $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ equivalente a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ma più semplice da risolvere.	Non modificano A e $\mathbf{b}$, ma sfruttano A in prodotti matrice-vettore.
Forniscono la soluzione esatta a meno degli errori di arrotondamento in un numero finito di operazioni.	Calcolano $\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}$, quindi la soluzione esatta potrebbe essere ottenuta solo dopo infinite operazioni. In realtà c'è un test d'arresto
$\dfrac{\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq C\epsilon_M$	$\dfrac{\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq C\epsilon_M + \varepsilon$

dove:
$\mathbf{x}$ è la soluzione esatta (su carta)
$\hat{\mathbf{x}}$ è la soluzioen numerica
ϵ_M è la precisione di macchina
ε è la tolleranza per il test d'arresto del metodo iterativo