Metodo delle sostituzioni in avanti

Dati: $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice triangolare inferiore non singolare,
$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vettore termine noto.
Soluzione: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\quad L\mathbf{x} = \mathbf{b}$
Metodo:

for $i = 1 : n$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} x_j}{L_{ii}}$$

end

Scrivere una function matlab con:

```
Input:  L, b
Output:  x
```

Per determinare la dimensione di una matrice all'interno della function:

```
[n,m]=size(L) % n=num righe, m=num colonne
n=length(b) % n=massima dimensione di b
```

Esercizio 1

Risolvere il sistema $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il proprio programma.

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Verificare la correttezza del proprio programma confrontando con il risultato del comando $\backslash$ di matlab.

Comando $\backslash$ di matlab. Quando la matrice è triangolare, il comando $\backslash$ implementa il metodo di sostituzione in avanti (forward) o all'indietro (backward).

Metodo delle sostituzioni all'indietro

Dati: $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice triangolare superiore non singolare,
$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vettore termine noto.
Soluzione: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\qquad U\mathbf{x} = \mathbf{b}$
Metodo:

$$\begin{array}{l} \text{for } i = n : -1 : 1 \\ \qquad x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}} \\ \text{end} \end{array}$$

Scrivere una function matlab con:

Input: `U, b`

Output: `x`

Per determinare la dimensione di una matrice all'interno della function:

```
[n,m]=size(U) % n=num righe, m=num colonne
n=length(b) % n=massima dimensione di b
```

Esercizio 2

Risolvere il sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il proprio programma.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Verificare la correttezza del proprio programma confrontando con il risultato del comando $\backslash$ di matlab.

Comando $\backslash$ di matlab. Quando la matrice è triangolare, il comando $\backslash$ implementa il metodo di sostituzione in avanti (forward) o all'indietro (backward).

Metodo di Eliminazione di Gauss (MEG)

Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dato $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, si pone $A^{(1)} = A$, $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}$.

for $k = 1, \dots, n-1$

  for $i = k+1, \dots, n$

    $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$;

    for $j = k+1, \dots, n$

      $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}$;

    end

    $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}$;

  end

end

$A^{(n)}$ è una matrice triangolare superiore, la rinomino U, $\mathbf{b}^{(n)}$ è un vettore colonna.
Quindi si risolve $U\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$ con il metodo delle sostituzioni all'indietro.

Function `meg.m` per risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

MEG + sostituzioni all'indietro
Input: A, b;
Output: x;

for $k = 1, \ldots, n-1$
  for $i = k+1, \ldots, n$
    $m_{ik} = \dfrac{A_{ik}}{A_{kk}}$;
    for $j = k+1, \ldots, n$
      $A_{ij} = A_{ij} - m_{ik} A_{kj}$;
    end
    $b_i = b_i - m_{ik} b_k$;
  end
end
salvare il triangolo superiore di A in U ;
risolvere $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

Osservazione. Il triangolo superiore di A (inclusa la diagonale principale) contiene la matrice $A^{(n)}$ del MEG. La salvo in U con il comando:

```
U=triu(A);
```

Esercizio

Si vuole risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 20 & 20 & -1 \\ 3 & -6 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 24 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$$

con il MEG + sostituzioni all'indietro.
Confrontare la propria soluzione con quella ottenuta con il comando \ di Matlab/Octave

MEG con pivotazione per righe

for $k = 1, \ldots, n-1$

  trovare r t.c. $|A_{rk}| = \max_{k \leq i \leq n} |A_{ik}|$;

  scambiare riga r di A con riga k di A;

  scambiare b_r con b_k;

  for $i = k+1, \ldots, n$

    $m_{ik} = A_{ik}/A_{kk}$;

    for $j = k+1, \ldots, n$

      $A_{ij} = A_{ij} - m_{ik} A_{kj}$;

    end

    $b_i = b_i - m_{ik} b_k$;

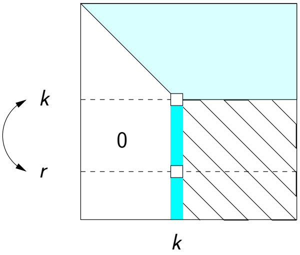
  end

end

U=triu(A);

risolvi $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Salvare in una nuova function `meg_pivot.m`



Esercizio: MEG senza e con pivotazione

Risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

con:

1. MEG senza pivotazione
2. MEG con pivotazione
3. backslash di matlab

Verificare che la matrice è non singolare, calcolandone il determinante.

Oss: il comando backslash di matlab esegue sempre la pivotazione