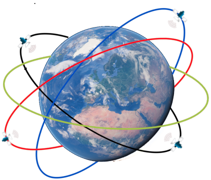
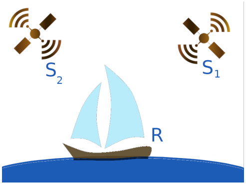
Problema di geolocalizzazione

Per geolocalizzare un ricevitore sulla superficie terrestre ($r_T = 6371$ km) vengono utilizzati 4 satelliti che orbitano ad una distanza r_S dalla terra.
I 4 satelliti mandano le loro coordinate sferiche (θ, φ, r) e l'istante di invio al ricevitore del segnale t_S ad un elaboratore. Il ricevitore a terra invia all'elaboratore gli istanti t_{R_i} di ricevimento dei segnali dei satelliti. I dati inviati sono:



	colatitudine θ	longitudine φ	r_S (km)	t_S (sec)
S_1	$\pi/6$	$\pi/6$	42168	0.0
S_2	$2\pi/9$	$\pi/3$	42168	10^{-4}
S_3	$5\pi/36$	$\pi/2$	42168	$2 \cdot 10^{-4}$
S_4	$\pi/3$	$2\pi/3$	42168	$5 \cdot 10^{-5}$

A

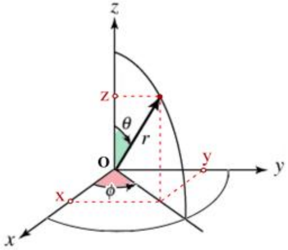


dal satellite	t_R (sec)
S_1	$t_{R_1} = 0.120331257355854$3
S_2	$t_{R_2} = 0.121928101523153$3
S_3	$t_{R_3} = 0.125584302064558$4
S_4	$t_{R_4} = 0.136433104502314$7

Conversione da coordinate sferiche a coordinate cartesiane

$\theta \in [0, \pi]$ è la colatitudine $= \frac{\pi}{2} -$latitudine
$\varphi \in [0, 2\pi]$ è la longitudine

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$



La distanza reale tra ogni satellite ed il ricevitore sarebbe

$$d_S = c \cdot (t_R - t_S)$$

dove $c = 299792$ km/sec è la velocità della luce nel vuoto.
In realtà i tempi t_R e t_S sono affetti da un errore (incognito) di misurazione e quindi

$$d_S = c \cdot ((t_R + \delta_R) - (t_S + \delta_S)) = c \cdot (t_R - t_S) + c\delta.$$

$\delta = \delta_R - \delta_S$ è incognito.
La posizione (x_R, y_R, z_R) del ricevitore e l'errore δ sono calcolati mediante la risoluzione del sistema di equazioni non lineari

$$\begin{cases} \sqrt{(x_{S_1} - x_R)^2 + (y_{S_1} - y_R)^2 + (z_{S_1} - z_R)^2} = c(t_{R_1} - t_{S_1}) + c\delta \\ \sqrt{(x_{S_2} - x_R)^2 + (y_{S_2} - y_R)^2 + (z_{S_2} - z_R)^2} = c(t_{R_2} - t_{S_2}) + c\delta \\ \sqrt{(x_{S_3} - x_R)^2 + (y_{S_3} - y_R)^2 + (z_{S_3} - z_R)^2} = c(t_{R_3} - t_{S_3}) + c\delta \\ \sqrt{(x_{S_4} - x_R)^2 + (y_{S_4} - y_R)^2 + (z_{S_4} - z_R)^2} = c(t_{R_4} - t_{S_4}) + c\delta, \end{cases}$$

dove $(x_{S_i}, y_{S_i}, z_{S_i})$ sono le coordinate cartesiane del satellite S_i.

Consegna

Dopo aver scelto un punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ opportuno, calcolare la posizione del ricevitore con il metodo di Broyden, con una tolleranza $\varepsilon = 10^{-9}$ e numero massimo di iterazioni pari a $kmax = 100$.
Scaricare la fuction `broyden.m` dalla pagina del corso:
`paola-gervasio.unibs.it/CS/MATLAB`

```
[zero,res,k,errv]=broyden(f,B0,x0,tol,kmax)
f = function handle vettoriale (colonna) n x 1
B0 =  matrice non singolare n x n
x0 = vettore iniziale (colonna) n x 1
tol = tolleranza test d'arresto
kmax =  numero massimo di iterazioni
```

Svolgimento

1. convertire le coordinate sferiche dei satelliti in coordinate cartesiane,
2. definire la funzione vettoriale di cui bisogna calcolare la radice,
3. definire gli altri input per il metodo di Broyden (fare il download di `paola-gervasio.unibs.it/CS/MATLAB/broyden.m`),
4. richiamare Broyden
5. rappresentare graficamente i risultati

Per rappresentare una sfera:

```
rt=6371; % raggio della terra in km
[x,y,z]=sphere; % parametrizza la sfera di
                % centro $(0,0,0)$ e r=1;
xt=x*rt; yt=y*rt; zt=z*rt;
surf(xt,yt,zt); axis equal
```

Per plottare un punto in 3D:

```
P=[1;1.2;2];
plot3(P(1),P(2),P(3),'ko',...
      'Markerfacecolor','k',...
      'Markersize',10)
```

Scelta del punto iniziale

Posso scegliere come `x0` la proiezione di uno dei satelliti sulla terra, in due casi si ha convergenza, nel terzo caso non si ha convergenza. Broyden, come Newton, è un metodo a convergenza locale, il punto x_0 deve essere sufficientemente vicino alla soluzione da cercare.