Formule di quadratura composite

Trapezi composita: `It=trapz(x,y)`
(function Matlab/octave: `x` è il vettore dei nodi di quadratura x_i, `y` è il vettore contenente i valori $f(x_i)$.)

Punto medio composita. Non è implementata in MATLAB.
Programmare una function che implementi la formula con intervalli di uguale misura e verificare grado di precisione e ordine di accuratezza.
`Imp=pmedioc(f,a,b,M)`
M è il numero di intervallini in cui si vuole suddividere (a, b).

Simpson composita. Non è implementata in MATLAB.
Programmare una function che implementi la formula con intervalli di uguale misura e verificare grado di precisione e ordine di accuratezza.
`Is=simpsonc(f,a,b,M)`
M è il numero di intervallini in cui si vuole suddividere (a, b).

Verifico grado di precisione di una fdq

Grado di precisione: una fdq ha grado di precisione p se integra esattamente tutti i polinomi di grado $\leq p$, ma non tutti quelli di grado maggiore di p.
Posso fare la verifica sui monomi.
Sia $\tilde{I}(f)$ l'approssimazione di I calcolata con la fdq.

1. Prendo $f(x) = 1$ e approssimo $I = \int_0^1 1dx = 1$.
   Se $\tilde{I} = 1$, allora sto integrando esattamente monomi di grado 0.
2. Prendo $f(x) = x$ e approssimo $I = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.
   Se $\tilde{I} = \frac{1}{2}$, allora sto integrando esattamente monomi di grado 1 e procedo col grado successivo.
3. .....
4. Prendo $f(x) = x^n$ e approssimo $I = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.
   Se $\tilde{I} = \frac{1}{n+1}$, allora sto integrando esattamente monomi di grado n e procedo col grado successivo.

Verifico ordine di accuratezza di una fdq

Ordine di accuratezza: ordine di convergenza a zero dell'errore rispetto ad H.

1. Considero una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty$ di cui conosco l'integrale esatto $I = \int_a^b f(x)dx$ e che non sia un polinomio integrato esattamente dalla fdq.
2. Considero alcuni valori di H, ad esempio $H = [\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}]$
3. per ogni valore di H calcolo l'integrale con la fdq e l'errore rispetto all'integrale esatto, salvo gli errori nel vettore Err.
4. plotto in un grafico in scala loglog: il vettore H in ascissa e il vettore Err in ordinata, quindi mi confronto con H, H^2, H^3 ecc.
5. La fdq ha ordine di accuratezza q se la curva dell'errore si comporta come H^q (sono parallele quando $H \to 0$).

Esercizio 1 (esottica.m)

Per il progetto di una camera a raggi infrarossi si è interessati a calcolare l'energia emessa da un corpo nero (cioè un oggetto capace di irradiare in tutto lo spettro alla temperatura ambiente) nello spettro (infrarosso) compreso tra le lunghezze d'onda $3\mu m$ e $14\mu m$.
L'energia emessa da un corpo di temperatura T (in gradi Kelvin) è calcolabile mediante l'equazione di Planck per l'energia:

$$E(T) = \int_{3\cdot 10^{-4}}^{14\cdot 10^{-4}} \frac{2.39 \cdot 10^{-11}}{x^5(e^{1.432/(Tx)} - 1)} dx, \qquad (1)$$

dove $E(T)$ è l'energia emessa, x è la lunghezza d'onda (in cm).
La temperatura di un corpo nero è $T = 213K^\circ$.

1. Calcolare l'energia emessa dal corpo nero con la formula dei trapezi composita con 51 punti.
2. Utilizzando la formula dell'errore

$$|I - I_T^c| \leq \frac{(b-a)}{12} H^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

   stimare l'errore commesso nell'approssimazione fatta al punto 1.
3. Determinare il minimo numero di intervalli (di uguale ampiezza H) che permette di approssimare l'integrale commettendo un errore $\leq 10^{-10}$.

Soluzione

1. Sia $f(x) = \frac{2.39 \cdot 10^{-11}}{x^5(e^{1.432/(Tx)}-1)}$ la funzione integranda.
Costruire un vettore di 51 punti equispaziati in $[3 \cdot 10^{-4}, 14 \cdot 10^{-4}]$, valutare la funzione e calcolare l'integrale con trapz.
Si ottiene `I= 2.069068361465305e-02`

2. Utilizzare la formula

$$|I - I_T^c| \leq \frac{b-a}{12} H^2 \max |f''(x)|$$

per stimare l'errore, sapendo che
$\max |f''(x)| \simeq 2.545420655473487 \cdot 10^8$.
Si ottiene `err= 1.129318297478404e-05`

3. Ponendo $\epsilon = 10^{-10}$ e chiedendo che

$$\frac{b-a}{12} H^2 \max |f''(x)| \leq \epsilon, \qquad (2)$$

si ha anche

$$|I - I_T^c| \leq \epsilon.$$

Si può isolare H dalla disuguaglianza (2), ovvero

$$H \leq \left(\frac{12\epsilon}{(b-a)\max |f''(x)|} \right)^{1/2} \qquad (3)$$

Se $H \leq H^* = \left(\frac{12\epsilon}{(b-a)\max |f''(x)|} \right)^{1/2}$, allora $|I - I_T^c| \leq \epsilon$.
Calcolare H^* e di conseguenza il numero di punti per implementare la formula dei trapezi.
Calcolare infine l'integrale e confrontarlo con quello ottenuto al passo 1.

Si ottiene `H=6.546580287551638e-08`, `M=16802` e `I= 2.069085548013210e-02`

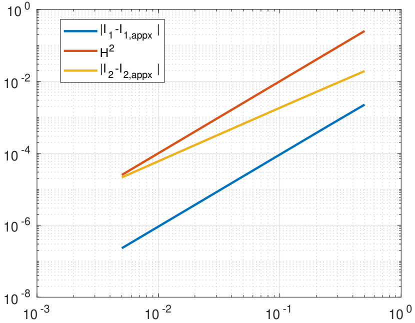
Esercizio 2

Utilizzando la formula del punto medio composita (su M intervalli di uguale ampiezza $H = (b-a)/M$) approssimare l'integrale $I_1 = \int_0^5 \frac{1}{1+(x-2)^2}dx$ con diversi valori di M (`M=10:10:1000`) e verificare che $|I_1 - I_{1,appx}| \simeq CH^2$ quando $H \to 0$.
(Si osservi che l'integrale esatto è $I_1 = atan(3) + atan(2)$)

In un secondo momento approssimare l'integrale $I_2 = \int_0^5 \sqrt{x}dx$ sempre con la formula di Punto medio composita (su M intervalli di uguale ampiezza H) e calcolare l'errore $|I_2 - I_{2,appx}|$ al variare di M (`M=10:10:1000`).
(Si osservi che l'integrale esatto ora è $I_2 = \frac{2}{3}5^{3/2}$).
Come si comporta ora l'errore quando $H \to 0$? Come mai?

Soluzione

L'errore commesso nell'approssimare I_1 decresce come H^2 per $H \to 0$, mentre l'errore commesso nell'approssimare I_2 scende più lentamente di H^2 per $H \to 0$. La funzione $\sqrt{x}$ è continua ma non derivabile in $x = 0$, quindi non è $C^2([0,5])$ e non vale più la stima dell'errore di integrazione di punto medio composita.



Esercizio 2-bis

Ripetere lo stesso esercizio utilizzando la formula dei trapezi composita (`trapz.m`) e Simpson composita (`simpsonc.m`). Verificare sperimentalmente quanto predetto dalla teoria.

Esercizio 3

Si calcoli il minimo numero M di intervalli necessari per approssimare, a meno di un errore di 10^{-4}, l'integrale delle seguenti funzioni negli intervalli indicati:

$$f_1(x) = e^x \cos(x) \quad \text{in } [0, \pi],$$

$$f_2(x) = \sqrt{x(1-x)} \quad \text{in } [0, 1],$$

utilizzando la formula composita del punto medio, la formula dei trapezi composita e la formula di Simpson.
Quale metodo richiede il minor numero di intervalli?

Soluzioni

Funzione f_1: la derivata seconda è $f_1''(x) = -2e^x \sin(x)$,
$\max_{[0,\pi]} |f''(x)| \simeq 15$;
la derivata quarta è $f_1^{(4)}(x) = -4e^x \cos(x)$,
$\max_{[0,\pi]} |f^{(4)}(x)| \simeq 92.6$;
Si ottiene:
$H_{max} = 7.136e-3$ e $M \geq 441$ per punto medio
$H_{max} = 5.046e-3$ e $M \geq 623$ per trapezi
$H_{max} = 1.774e-1$ e $M \geq 18$ per Simpson
L'integrale approssimato alla 4a cifra decimale è $I = -12.0703$

Funzione f_2: la derivata seconda è $f_2''(x) = \dfrac{1}{4(-x^2+x)^{3/2}}$ che va all'infinito in $x = 0$ e in $x = 1$. Quindi $\sup_{[0,1]} |f_3''(x)| = +\infty$ e la stima dell'errore non può essere utilizzata per capire quanti sottointervalli dobbiamo prendere per garantire che l'errore sia minore di una tolleranza fissata.