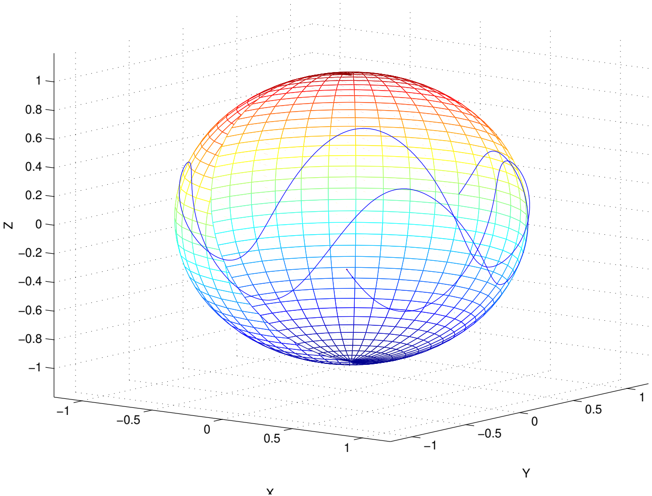
Moto di un punto di massa m soggetto alla forza di gravità e vincolato ad una superficie (vincolo liscio).



Il moto (descritto da $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$) di un punto di massa m soggetto alla forza di gravità $\mathbf{G} = [0, 0, -gm]^T$ (con $g = 9.8$ m/s^2) e vincolato alla superficie sferica di equazione $\Phi(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ soddisfa il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}} = \underbrace{\frac{1}{m}\left(\mathbf{G} - \frac{m\dot{\mathbf{x}}^T H \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}^T \nabla\Phi}{(\nabla\Phi)^T \nabla\Phi} \nabla\Phi\right)}_{\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))} & t \geq t_0 \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 & \text{dato} \\ \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0 & \text{dato} \end{cases} \tag{1}$$

dove:
$\mathbf{x}(t)$ posizione, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$
m massa del punto
$\mathbf{G}(t)$ forza esterna, $\mathbf{G}(t) = [G_1(t), G_2(t), G_3(t)]^T$
$\Phi(\mathbf{x}) = 0$ equazione della superficie cui è vincolato il punto,

$$\nabla\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_3} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 x_2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial x_3} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3\partial x_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3\partial x_2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 x_3} \end{bmatrix}$$

H è la matrice Hessiana di Φ, $\nabla\Phi$ è il vettore gradiente.

Prendiamo $m = 1$.
Da $\Phi(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$, segue che $\nabla\Phi(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ e $H = 2I$.
Consideriamo i dati iniziali $\mathbf{x}_0 = [0, -1, 0]^T$ e $\mathbf{v}_0 = [0.8, 0, 1.2]^T$.

Riscriviamo il sistema dato, componente per componente.

Osserviamo che, dato $\mathbf{x}$, $\alpha = \dfrac{m\dot{\mathbf{x}}^T H\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}^T\nabla\Phi}{(\nabla\Phi)^T\nabla\Phi}$ è un valore scalare (dipendente da $\mathbf{x}$).

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{1}{m}\left(G_1 - \alpha\left(\nabla\Phi\right)_1\right) \\ \ddot{x}_2 = \frac{1}{m}\left(G_2 - \alpha\left(\nabla\Phi\right)_2\right) \\ \ddot{x}_3 = \frac{1}{m}\left(G_3 - \alpha\left(\nabla\Phi\right)_3\right) \\ x_1(t_0) = (\mathbf{x}_0)_1 \\ x_2(t_0) = (\mathbf{x}_0)_2 \\ x_3(t_0) = (\mathbf{x}_0)_3 \\ \dot{x}_1(t_0) = (\mathbf{v}_0)_1 \\ \dot{x}_2(t_0) = (\mathbf{v}_0)_2 \\ \dot{x}_3(t_0) = (\mathbf{v}_0)_3 \end{cases} \tag{2}$$

$\nabla\Phi$ dipende da $\mathbf{x}$.

Per risolvere il problema, dobbiamo ricondurre il sistema di 3 equazioni del secondo ordine ad un sistema di 6 equazioni del primo ordine.
Vogliamo riscrivere il problema come

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) & t > 0 \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Poniamo
$y_i(t) = x_i(t)$ per $i = 1, 2, 3$
e
$y_4(t) = \dot{x}_1(t) = y_1'(t)$
$y_5(t) = \dot{x}_2(t) = y_2'(t)$
$y_6(t) = \dot{x}_3(t) = y_3'(t)$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_4 \\ y_2' = y_5 \\ y_3' = y_6 \\ y_4' = \frac{1}{m}\left(G_1 - \alpha\,(\nabla\Phi)_1\right) \\ y_5' = \frac{1}{m}\left(G_2 - \alpha\,(\nabla\Phi)_2\right) \\ y_6' = \frac{1}{m}\left(G_3 - \alpha\,(\nabla\Phi)_3\right) \end{cases} \tag{3}$$

con $\alpha = \dfrac{m\dot{\mathbf{x}}^T H\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}^T\nabla\Phi}{(\nabla\Phi)^T\nabla\Phi}$, $\mathbf{G} = [0, 0, -9.8m]^T$, $\nabla\Phi = 2\mathbf{x}$, $H = 2I$, e condizioni iniziali:

$$\begin{array}{lll} y_1(t_0) = (\mathbf{x}_0)_1, & y_2(t_0) = (\mathbf{x}_0)_2, & y_3(t_0) = (\mathbf{x}_0)_3 \\ y_4(t_0) = (\mathbf{v}_0)_1, & y_5(t_0) = (\mathbf{v}_0)_2, & y_6(t_0) = (\mathbf{v}_0)_3 \end{array}$$

Implementazione

1. Scriviamo una function matlab che, dati in input t scalare e $\mathbf{y}$ vettore, costruisca il vettore $\mathbf{f} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$.
2. Dato $T = 10$, si approssimi il problema con:
a. Eulero esplicito con $N_h = 2000$ passi temporali ($h = 0.005$), e $N_h = 20000$ ($h = 0.0005$)
b. Runge Kutta 4 con $N_h = 2000$,
c. `ode45` (scelta adattiva del passo),
d. `ode23` (scelta adattiva del passo).
3. Per visualizzare la traiettoria calcolata numericamente:
`orbite3d(tn,un)`
(`http://paola-gervasio.unibs.it/CS/MATLAB`).
4. Commentare i risultati ottenuti.

Analisi dei risultati e confronto dei metodi

La bontà della soluzione numerica può essere valutata osservando che la quantità $d(\mathbf{x}(t)) = |x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2 - 1|$ (che rappresenta la distanza tra il punto e la superficie della sfera) dovrebbe essere nulla ad ogni t per garantire l'aderenza alla superficie.

Dopo aver calcolato `[tn,un]`, calcoliamo e disegniamo $d(\mathbf{x}(T))$ (T è il tempo finale).

metodo	n. step	$d(\mathbf{x}(T))$
`EE`	20000	0.08
`RK4`	2000	4.76e-6
`ode45`	268	0.5050
`ode23`	323	0.0091

Il risultato ottenuto con `ode45` non è buono, lo si vede anche graficamente.

Nei codici di MATLAB il passo adattivo e la soluzione sono accettati se

```
stimatore(i) <= max(RelTol*abs(un(i)),AbsTol(i))
```

(`i` è la componente del vettore della soluzione **y**).
Valori di default:

```
RelTol=1e-3                 AbsTol=1e-6
```

Per modificare `RelTol`:

```
options=odeset('RelTol',1.e-06);
[tn,un]=ode45(@fvinc,tspan,y0,options);
```

metodo	`RelTol`	n. step	$d(\mathbf{x}(T))$
ode45	1.e-6	972	1.0421e-04
ode23	1.e-6	2366	1.1482e-05

```
function [f]=fvinc(t,y)
% FVINC Function per  l'esempio del pendolo sferico
% y(1:3) sono le coordinate della posizione del punto
% y(4:6) sono le componenti della velocita' del punto
f=zeros(size(y));
H=2*eye(3); % Hessiana
xp=y(4:6); % velocita`
mass=1;
G=[0;0;-mass*9.8];  % forza esterna
gradphi=2*y(1:3); % gradiente di Phi
alpha=(mass*xp'*H*xp+G'*gradphi)/(gradphi'*gradphi);
f(1:3)=y(4:6);
f(4:6)=(G-alpha*gradphi)/mass;
```