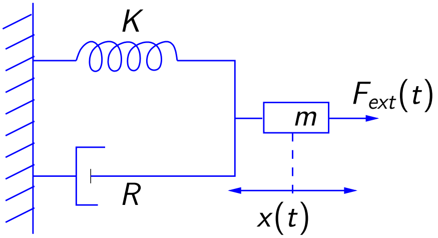
Equazione differenziale associata ad un oscillatore forzato



Oscillatore semplice formato da un corpo di massa m e da una molla di contante elastica K.
L'oscillatore è sottoposto ad una forza esterna $F_{ext}(t)$ (t = tempo) ed è presente una resistenza meccanica R.
$x(t)$ è lo spostamento della massa m al tempo t rispetto alla posizione di equilibrio determinata dalla lunghezza a riposo della molla.

2a legge di Newton: $F = m \cdot a$, con $a = x''(t)$ accelerazione e F la risultante di tutte le forze che agiscono sul punto di massa m.

$$\begin{array}{rcl} F & = & F_{ela} + F_{res} + F_{ext} \\ F_{ela} & = & -Kx(t) \quad \text{(legge di Hooke, } K = \text{cost. elastica)} \\ F_{res} & = & -Rx'(t) \quad \text{(resistenza di tipo viscoso, } R = \text{coeff. di resistenza)} \\ F_{ext} & = & \text{(forza esterna)} \\ \Rightarrow & & -Kx(t) - Rx'(t) + F_{ext}(t) = m\,x''(t) \end{array}$$

$x(t)$ è soluzione della seguente equazione differenziale:

$$m\,x''(t) + Rx'(t) + Kx(t) = F_{ext}(t) \qquad t \geq t_0$$

L'equazione differenziale ha unica soluzione se assegno due condizioni iniziali:
$x(t_0) = x_0$ spostamento all'istante iniziale,
$x'(t_0) = 0$ velocità all'istante iniziale.

Trasformazione in un sistema del primo ordine

Dobbiamo riscrivere l'equazione del secondo ordine come un sistema di equazioni differenziali di ordine 1. Poniamo:

$$y_1(t) = x(t), \qquad y_2(t) = y_1'(t) = x'(t),$$

$$m \underbrace{x''(t)}_{y_1''(t)=y_2'(t)} + R\underbrace{x'(t)}_{y_2(t)} + K\underbrace{x(t)}_{y_1(t)} = F_{ext}(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = \frac{1}{m}\left(-Ky_1(t) - Ry_2(t)\right) + \frac{F_{ext}(t)}{m} \\ y_1(0) = x_0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Analisi del problema

Il problema dato è lineare, quindi possiamo riscrivere

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -R/m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_{ext}(t)}{m} \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di A servono per individuare quali h garantiscono che un determinato metodo sia assolutamente stabile nella risoluzione del problema dato.
Oss. Se $R = 0$, gli autovalori sono immaginari puri.

Esercizio

Si considerino i seguenti dati (tralasciamo le unità di misura):
$F_{ext}(t) = 0$
$R = 0.2$ (coefficiente di attrito)
$K = 0.8$ (costante elastica della molla),
$m = 0.5$ (massa del corpo),
$x_0 = 1$ (posizione iniziale del corpo).
Si vuole calcolare la soluzione del problema con il metodo predictor-corrector AB3-AM4.

1. Calcolare la soluzione con $h = 0.001$ (diventa la mia soluzione di riferimento). Il metodo AB3AM4 è di ordine 4, se il metodo è ass. stabile con questo h, mi aspetto che l'errore sia dell'ordine di 10^{-12}.

2. Risolvere lo stesso problema con
$h = 1$, $h = 0.8$, $h = 0.4$, $h = 0.1$ e disegnare la soluzione ottenuta sullo stesso grafico su cui è disegnata la soluzione di riferimento. Dire per quali valori di h lo schema è assolutamente stabile e per quali valori di h la soluzione è una buona approssimazione della soluzione esatta (qui rappresentata dalla soluzione di riferimento).

3. Ripetere i punti 1 e 2, ma con $F_{ext} = 1$, osservare che le conclusioni sulla assoluta stabilità e sulla bontà della soluzione numerica sono analoghe a quelle che si ottengono con $F_{ext} = 0$.

AB3-AM4

Sfruttando la rappresentazione grafica della regione di assoluta stabilità del metodo, determinare il valore $h_0 > 0 : \ \forall h < h_0$ il metodo AB3-AM4 risulti assolutamente stabile. Lavorare sul problema omogeneo e poi verificare che la soluzione del problema non omogeneo "esplode" in corrispondenza degli $h >= h_0$.