# Matrici simmetriche definite positive

Definizione Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è **simmetrica e definita positiva** (sdp in breve) se è simmetrica e se

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Criterio di Silvester. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è sdp se e solo se è simmetrica e tutti minori principali sono strettamente positivi.

Proprietà 1. Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è sdp allora gli autovalori di $A$ sono tutti reali e strettamente positivi.

Proprietà 2. Se gli autovalori di $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sono tutti strettamente positivi e $A$ è simmetrica, allora $A$ è sdp.

Osservazione. Il fatto che gli autovalori di $A$ siano strettamente positivi, non garantisce che $A$ sia sdp. Esempio:
$A = [2.8, 2.4; -0.6, 0.2]$ ha autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, ma non è sdp (perché non è simmetrica).