Analisi dell'errore dell'interpolazione composita lineare

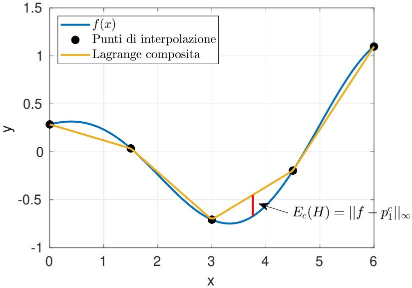
Sia

$$H = \max_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$$

Se $f \in C^2([x_0, x_n])$, esiste una costante $c_1 > 0$ indipendente da H t.c. (p_1^c dipende da H):

$$E_c(H) = \|f - p_1^c\|_\infty = \max_{x_0 \le x \le x_n} |f(x) - p_1^c(x)| \le c_1 H^2 \|f^{(2)}\|_\infty$$

Se i nodi x_i sono equispaziati, allora $c_1 = 1/8$.



Analisi dell'errore dell'interpolazione spline

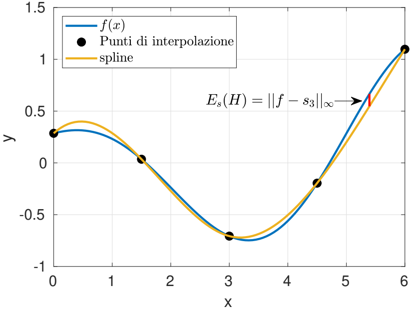
Sia

$$H = \max_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$$

Se $f \in C^4([x_0, x_n])$, esiste una costante $c_2 > 0$ indipendente da H t.c. (s_3 dipende da H):

$$E_s(H) = \|f - s_3\|_\infty = \max_{x_0 \le x \le x_n} |f(x) - s_3(x)| \le c_2 H^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

Se i nodi x_i sono equispaziati, allora $c_2 = 5/384$.



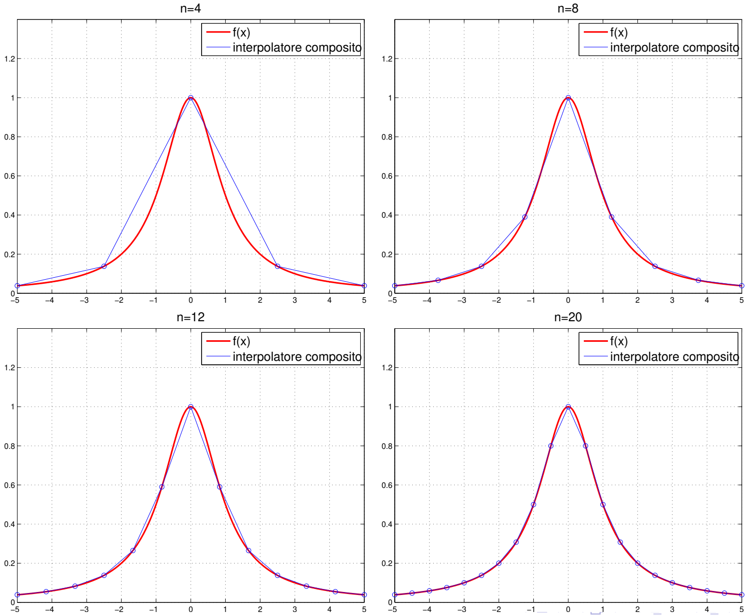
Problema 6:

Data la funzione $f(x) = 1/(x^2+1)$ sull'intervallo $[x_a, x_b] = [-5, 5]$, costruire l'interpolatore lineare composito $p_1^c(x)$ interpolante f in $(n+1)$ nodi equispaziati, con $n = 10 : 10 : 500$

1. Se $n \leq 100$, rappresentare su uno stesso grafico $f(x)$ e $p_1^c(x)$,
2. per ogni valore di n, posto $H = (x_b - x_a)/n$, calcolare l'errore $E_1^c(H) := \|f - p_1^c\|_\infty$,
3. alla fine del ciclo in n, rappresentare in scala logaritmica tutti gli errori calcolati (H in ascissa e gli errori $E_1^c(H)$ in ordinata),
4. verificare che, quando $H \to 0$, gli errori $E_1^c(H)$ si comportano come dice la stima teorica, ovvero $E_1^c(H) \leq c_1 H^2$.

Nota. Per calcolare gli errori valutare il max su un insieme di 1000 punti equispaziati in $[x_a, x_b]$.

Svolgimento



Come capire se l'errore è del secondo ordine in H.

Dopo aver salvato gli errori nel vettore `e1ch` ed i valori di H nel vettore `H` possiamo valutare il comportamento degli errori in funzione di H come segue:

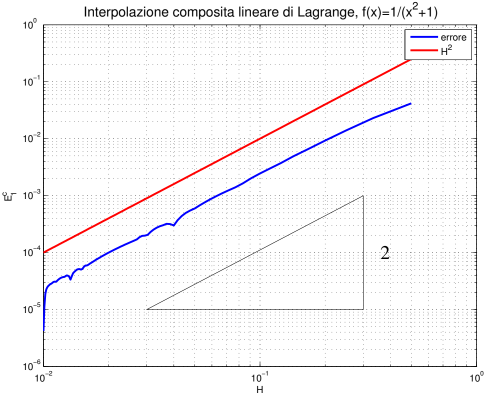
```
c1=e1ch./H.^2;
```

Se il vettore `c1` contiene valori pressoché costanti, allora vuole dire che $E_1^c(H) \simeq c_1 H^2$.

Alternativamente, se dal plot:

```
loglog(H,e1ch,'b', H,H.^2,'r')
```

si ottengono due linee con la stessa pendenza, allora vuole dire che $E_1^c(H) \simeq c_1 H^2$.



Problema 7:

Data la funzione $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ sull'intervallo $[x_a, x_b] = [-5, 5]$, costruire la spline cubica $s_3(x)$ interpolante f in $(n+1)$ nodi equispaziati, con $n = 10 : 10 : 500$

1. Se $n \leq 100$, rappresentare su uno stesso grafico $f(x)$ e $s_3(x)$,
2. per ogni valore di n, posto $H = (x_b - x_a)/n$, calcolare l'errore $E_s(H) := \|f - s_3\|_\infty$,
3. alla fine del ciclo in n, rappresentare in scala logaritmica tutti gli errori calcolati (H in ascissa e gli errori $E_s(H)$ in ordinata),
4. verificare che, quando $H \to 0$, gli errori $E_s(H)$ si comportano come dice la stima teorica, ovvero $E_s(H) \leq c_2 H^4$.

Nota. Per calcolare gli errori valutare il max su un insieme di 1000 punti equispaziati in $[x_a, x_b]$.

Lavorando in maniera analoga con le spline, salviamo gli errori nel vettore `esh` e calcoliamo

```
c2=esh./H.^4;
```

Se il vettore c2 contiene valori pressoché costanti, allora vuole dire che $E_s(H) \simeq c_2 H^4$.