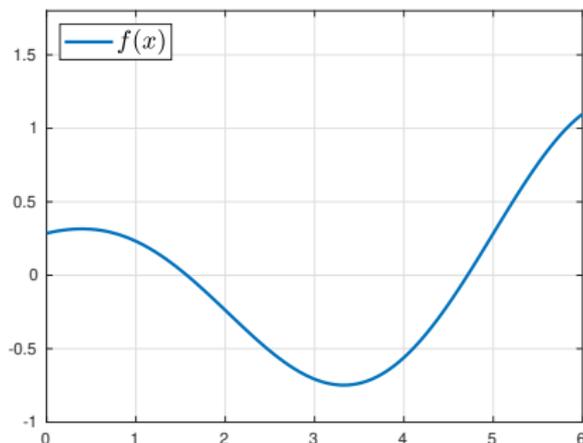


# Interpolazione globale di Lagrange

## Problema 1.

Data  $f(x) = \frac{x+2}{7} \cos(x)$  sull'intervallo  $[x_a, x_b] = [0, 6]$ , si vuole costruire il polinomio interpolatore di Lagrange di  $f$  in  $(n+1)$  nodi equispaziati al variare di  $n = 1, \dots, 10$ .



# Svolgimento

Per ogni  $n$ :

- si calcoli il polinomio di interpolazione di Lagrange  $p_n(x)$  interpolante  $f$  su  $(n + 1)$  nodi equispaziati,
- si rappresenti graficamente  $p_n(x)$  insieme alla funzione  $f(x)$ . Per la rappresentazione grafica, si utilizzi un vettore di 200 punti equispaziati in  $[x_a, x_b]$ ,
- si valuti l'errore

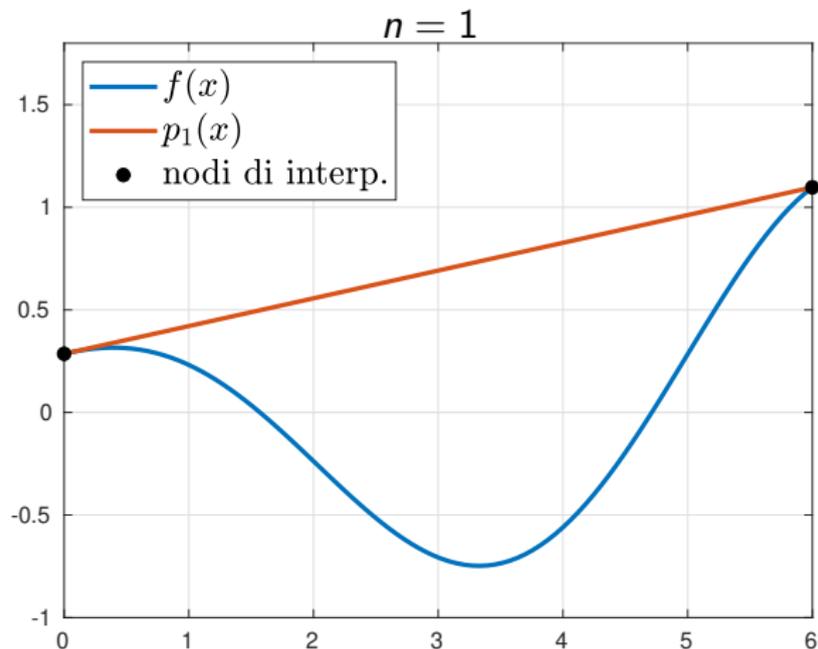
$$E_n = \|e_n\|_\infty = \|f - p_n\|_\infty = \max_{x \in [x_a, x_b]} |f(x) - p_n(x)|$$

(si valuti  $|f(x) - p_n(x)|$  negli stessi punti utilizzati per il grafico)

A ciclo concluso plottare su una seconda figura gli errori  $E_n$  in funzione del grado  $n$ .

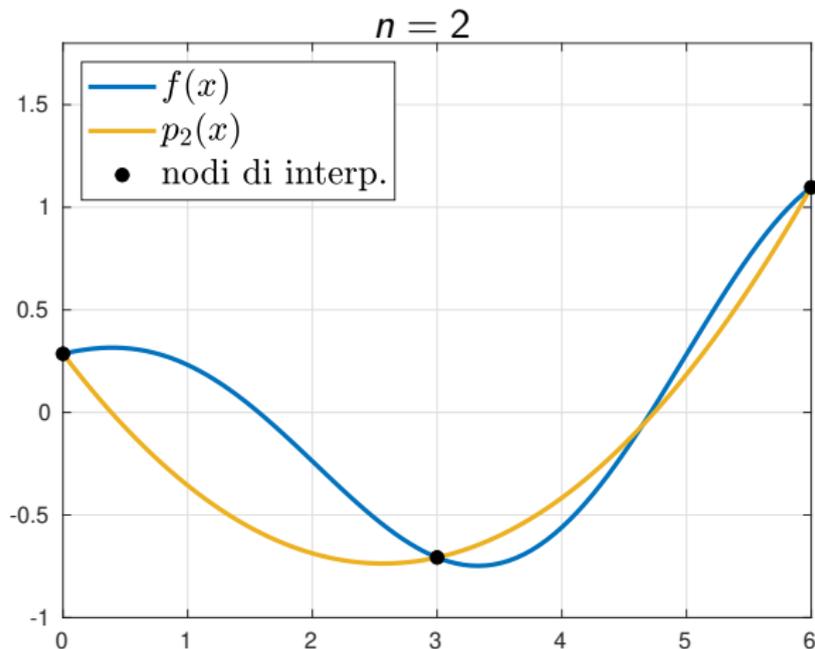
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{x+2}{7} \cos(x)$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione equispaziati in  $[0, 6]$ .



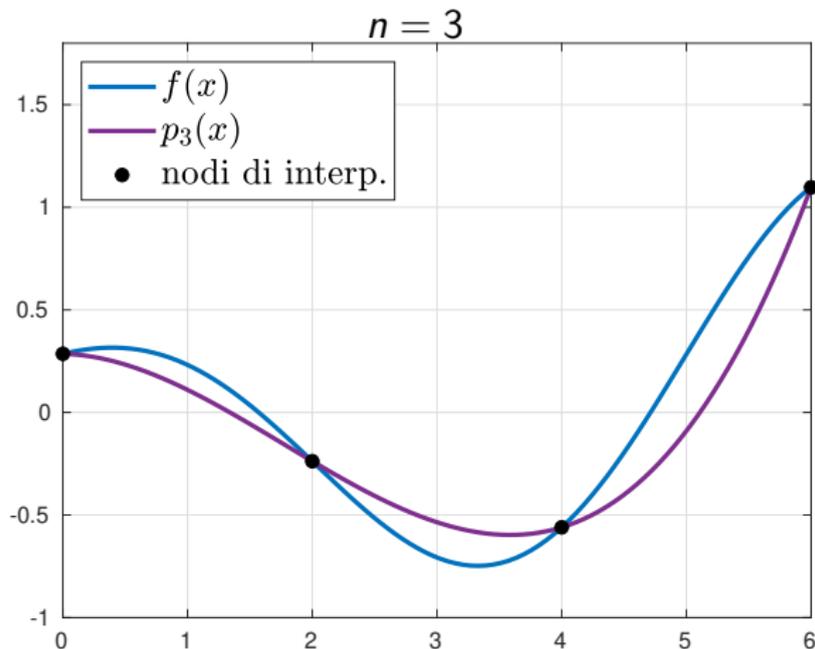
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{x+2}{7} \cos(x)$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione equispaziati in  $[0, 6]$ .



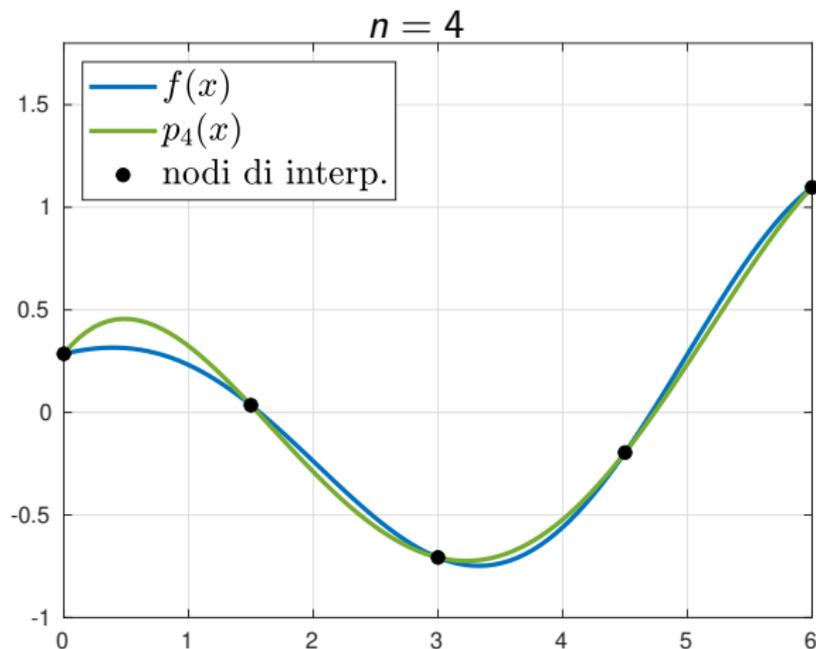
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{x+2}{7} \cos(x)$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione equispaziati in  $[0, 6]$ .



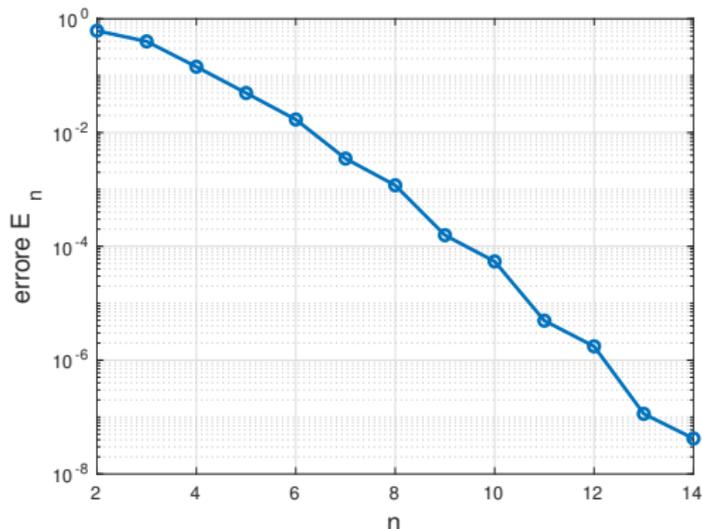
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{x+2}{7} \cos(x)$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione equispaziati in  $[0, 6]$ .



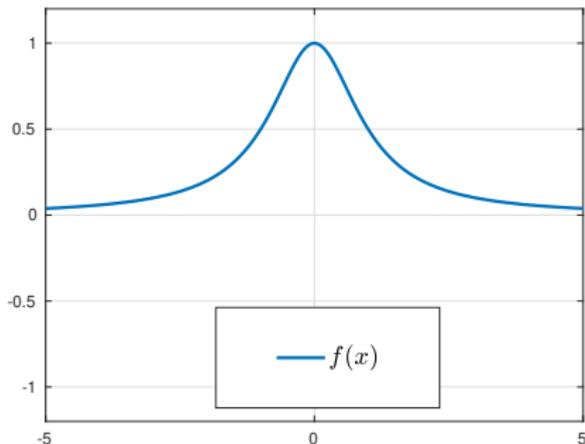
## Gli errori

$f(x) = \frac{x+2}{7} \cos(x)$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione equispaziati in  $[0, 6]$ .



Gli errori  $E_n$  stanno tendendo a zero quando  $n$  cresce. In questo caso l'interpolazione globale di Lagrange su nodi equispaziati fornisce una successione di polinomi  $p_n(x)$ , per  $n \geq 1$ , che sta convergendo alla funzione  $f(x)$  quando  $n$  cresce.

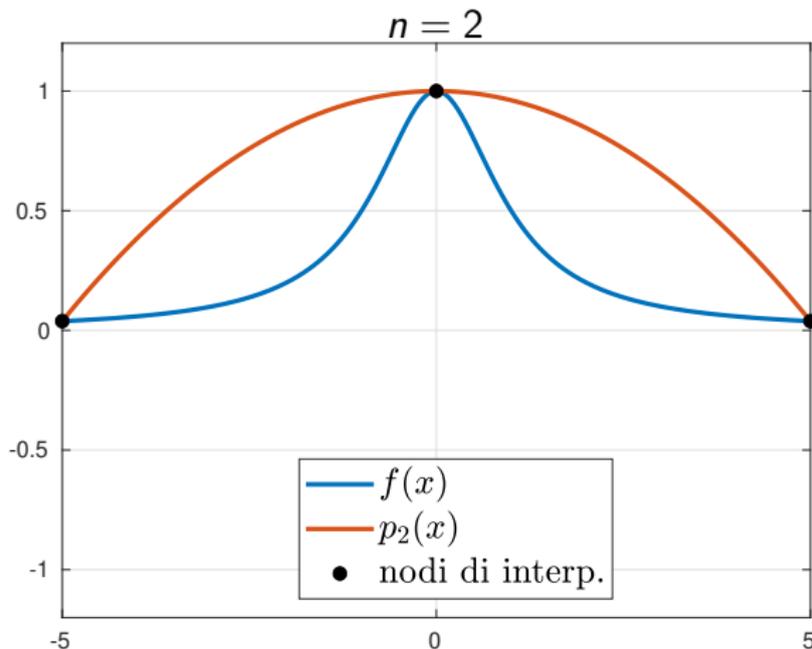
**Problema 2.** Data  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , si vuole costruire il polinomio interpolatore di Lagrange di  $f$  in  $(n+1)$  nodi equispaziati in  $[x_a, x_b] = [-5, 5]$  per  $n = 2, \dots, 14$ .



Ripetere il lavoro svolto nel Problema 1.

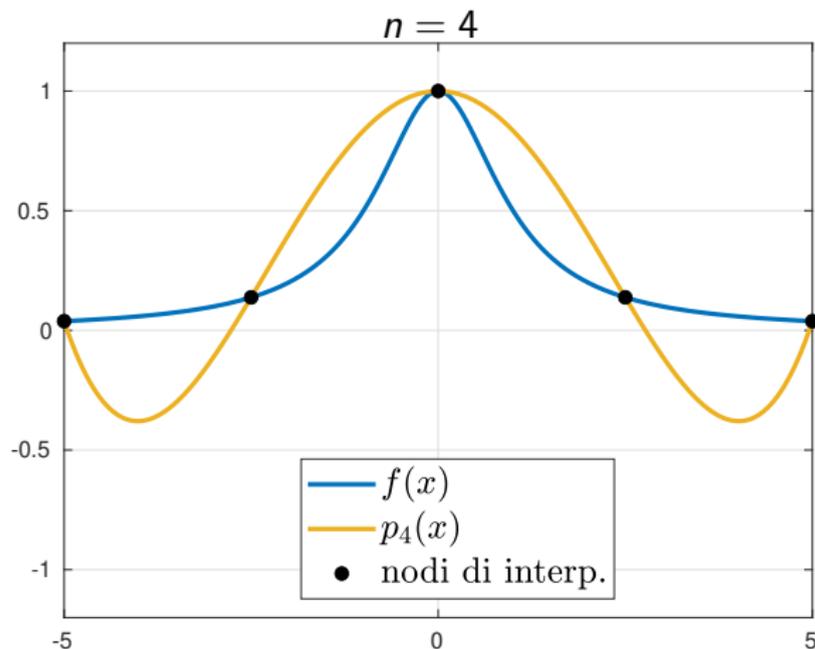
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione equispaziati in  $[-5, 5]$ .



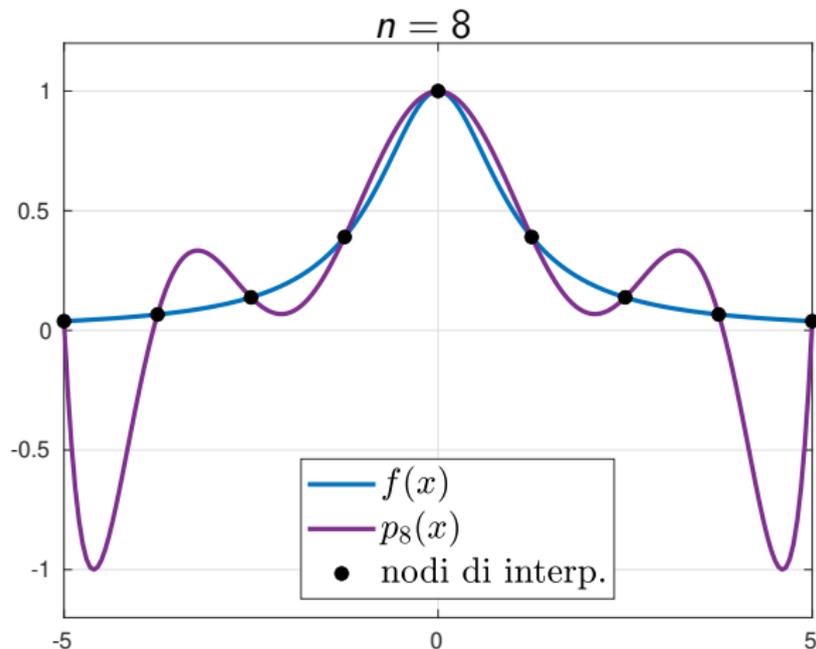
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione equispaziati in  $[-5, 5]$ .



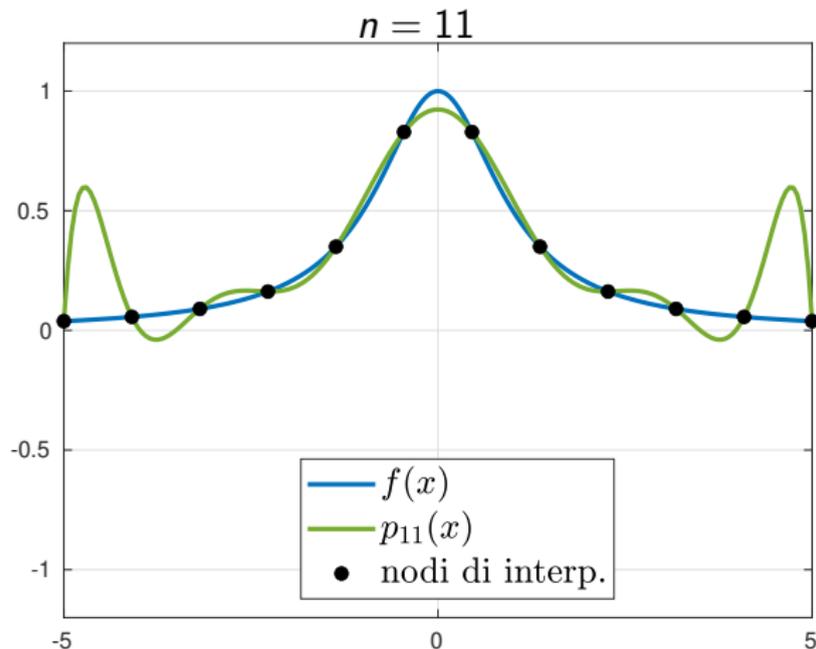
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione equispaziati in  $[-5, 5]$ .



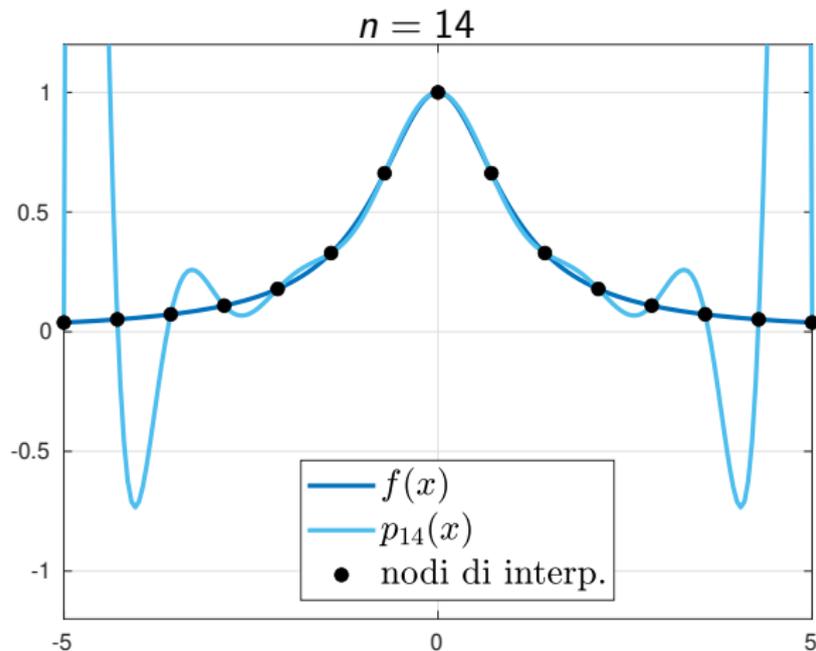
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione equispaziati in  $[-5, 5]$ .



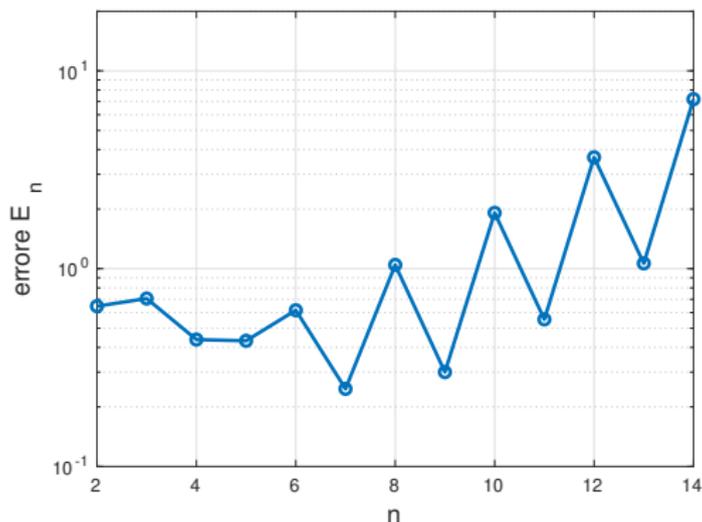
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione equispaziati in  $[-5, 5]$ .



## Gli errori

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione equispaziati in  $[-5, 5]$ .



Gli errori  $E_n$  NON stanno diminuendo quando  $n$  cresce. In questo caso l'interpolazione globale di Lagrange su nodi equispaziati fornisce una successione di polinomi  $p_n(x)$ , per  $n \geq 1$ , che NON sta convergendo alla funzione  $f(x)$  quando  $n$  cresce.

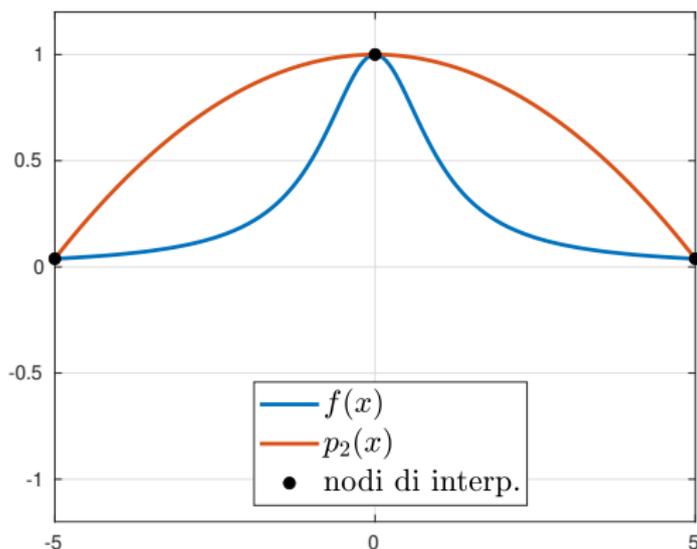
**Problema 3.** Data  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , si vuole costruire il polinomio interpolatore di Lagrange di  $f$  in  $(n+1)$  nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto in  $[x_a, x_b] = [-5, 5]$  per  $n = 1, \dots, 10$ .  
Nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto:

$$\hat{x}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right), \quad i = 0, \dots, n, \quad \text{in } [-1, 1]$$
$$x_i = \frac{x_b - x_a}{2} \hat{x}_i + \frac{x_b + x_a}{2}, \quad i = 0, \dots, n, \quad \text{in } [x_a, x_b]$$

Ripetere il lavoro svolto nel Problema 2.

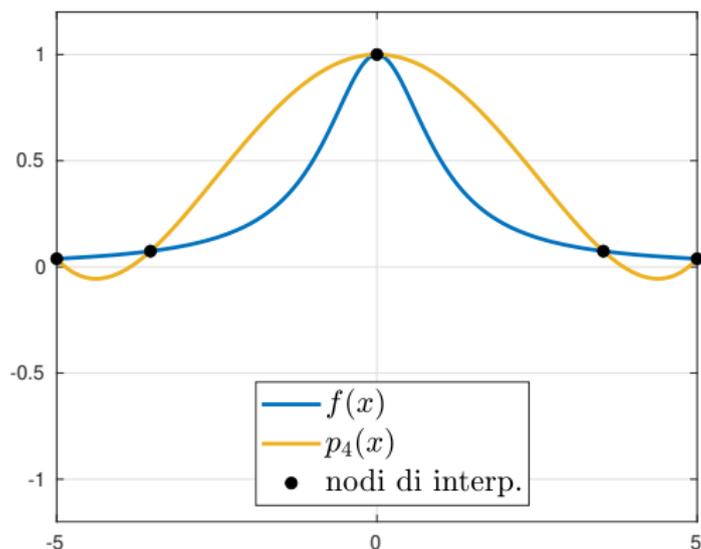
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto in  $[x_a, x_b] = [-5, 5]$ .



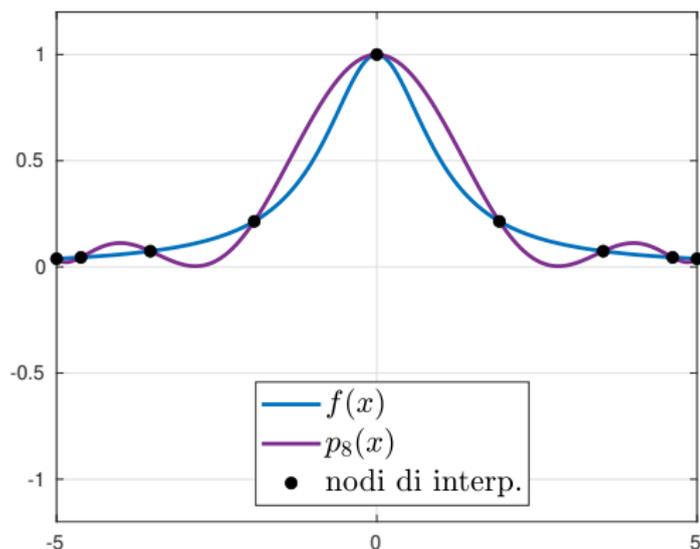
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto in  $[x_a, x_b] = [-5, 5]$ .



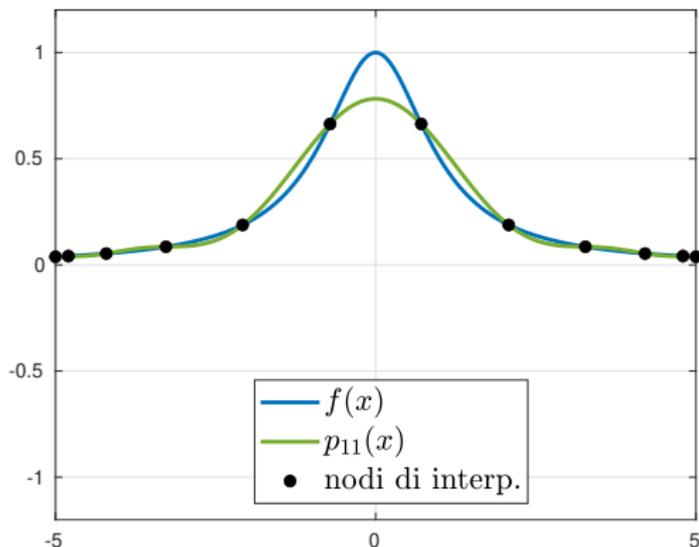
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto in  $[x_a, x_b] = [-5, 5]$ .



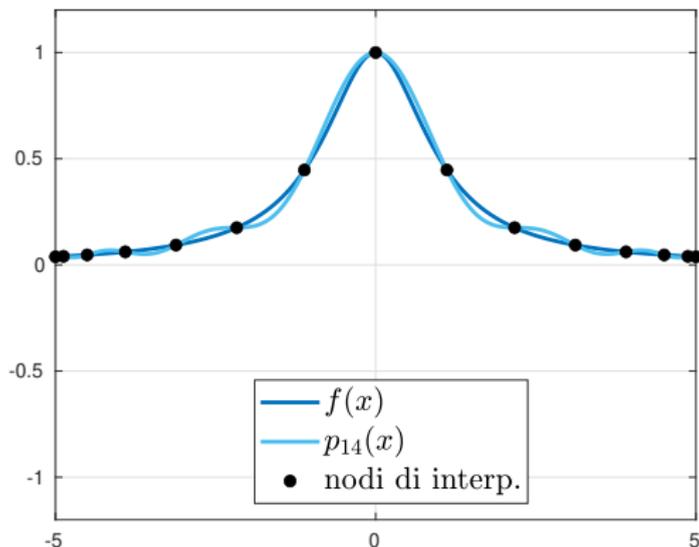
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto in  $[x_a, x_b] = [-5, 5]$ .



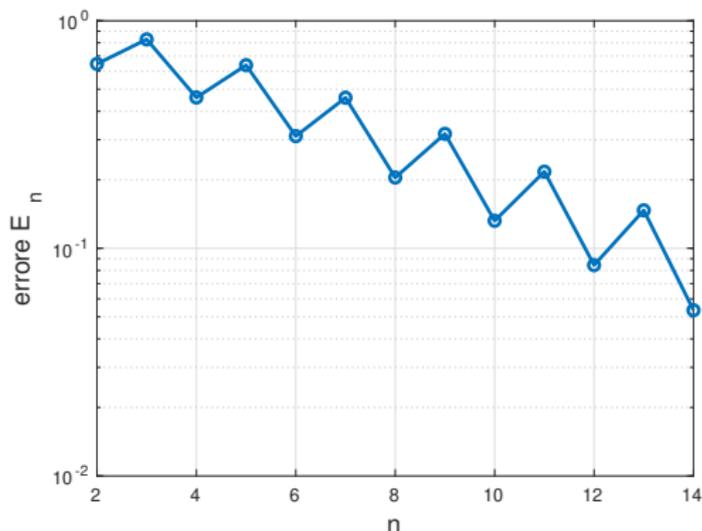
# Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto in  $[x_a, x_b] = [-5, 5]$ .



## Gli errori

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $p_n(x)$  su  $(n+1)$  nodi di interpolazione CGL in  $[-5, 5]$ .



Gli errori  $E_n$  stanno tendendo a zero quando  $n$  cresce.  
L'interpolazione globale di Lagrange su nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto fornisce una successione di polinomi  $p_n(x)$ , per  $n \geq 1$ , che converge alla funzione  $f(x)$  quando  $n$  cresce.

## Osservazioni

Quando si vuole costruire il polinomio di Lagrange  $p_n$  con  $n \geq 20$ , la matrice di Vander Monde è mal condizionata. Se si risolve il sistema  $X\mathbf{a} = \mathbf{y}$  con il comando `backslash`, Matlab segnala che la matrice è mal condizionata.

Lo stesso succede se si usa `polyfit`:

```
% x, y vettori di n+1 elementi ciascuno  
a=polyfit(x,y,n); % Matlab dice che risolve Xa=y  
% in realta' fa anche qualcos'altro, ma non si sa cosa  
y1=polyval(a,x1);
```

L'alternativa a VanderMonde è la **formula baricentrica** (non è implementata in Matlab, si trova sulla pagina del corso):

```
y1=barycentric(x,y,x1)
```

# Confronto tra VanderMonde e forma baricentrica

Costruire l'interpolatore globale di Lagrange  $p_n(x)$  di  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  sull'intervallo  $[-5, 5]$  in  $n + 1$  nodi di Gauss-Chebyshev, sia con la matrice di VanderMonde che con la formula baricentrica.

