Formule di quadratura Gaussiane su intervalli limitati

Sono formule di tipo interpolatorio, i nodi NON sono equispaziati.
Poiché l'integrale su un intervallo limitato (a, b) può essere sempre ricondotto all'integrale su $(-1, 1)$ tramite la trasformazione:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\underbrace{\varphi(x)}_{t})dx$$

con

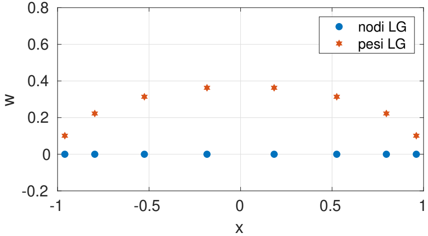
$$t = \varphi(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2},$$

le formule Gaussiane sono definite su $[-1, 1]$.

Formule di Legendre-Gauss

Sono formule **aperte**:

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_i)w_i \simeq \int_{-1}^{1} f(x)dx$$



con **nodi** e **pesi**:

$$x_i = \text{radici di } L_{n+1}(x) \text{ per } \ i = 0, \dots, n$$
$$w_i = \frac{2}{(1-x_i)^2}\frac{1}{[L'_{n+1}(x_i)]^2}, \qquad \text{per } i = 0, \dots, n$$

e $L_{n+1}(x)$ = polinomio di Legendre di grado $n+1$:

$$\begin{cases} L_0(x) = 1, \qquad L_1(x) = x, \\ L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xL_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2\dots \end{cases}$$

Grado di precisione (o di esattezza) $= 2n+1$.

Calcolo di x_i e w_i implementato in `xwlg.m` (pagina del corso > Function MATLAB)

Le formule LG possono essere utilizzate nella versione composita suddividendo l'intervallo $[a, b]$ in M sottointervalli.

Esempio di applicazione delle formule LG

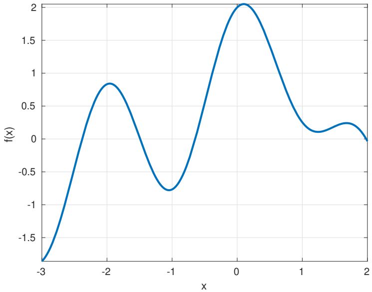
Approssimare l'integrale $\int_{-3}^{2} \cos(x) e^{-x^2} dx$

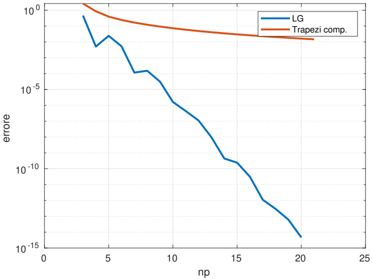
```
n=10;
np=n+1; % numero di nodi di quadratura
f=@(x)cos(x).*exp(-x.^2);
% nodi e pesi gia' mappati sull'intervallo (-3,4)
[x,w]=xwlg(np,-3,2); % formula LG
Ilg=sum(f(x).*w)
fprintf('n= %d,  Ilg=%13.6e \n',n,Ilg)
```

```
n= 10,  Ilg= 1.382813e+00
```

Confronto tra LG e Trapezi composita

Sia $f(x) = \cos(2\pi x) + \exp(sin(x))\cos(x)$, si vuole approssimare
$I_{ex} = \int_{-3}^{2} f(x)dx$ con fdq LG e Trapezi composita utilizzando lo stesso numero di nodi di quadratura.
Sapendo che $I_{ex} = e^{\sin(2)} - e^{-sin(3)}$, confrontare gli errori di quadratura forniti dalle due formule al variare del numero di punti $np = 3:21$.
Rappresentare gli errori ottenuti su un grafico in scala `semilogy`.





Formule Gaussiane con nodi di Chebyshev

Attenzione che se si usano i nodi di Chebishev usati per l'interpolazione:

$$x_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right) \qquad \text{per } i = 0, \ldots, n$$

insieme ai pesi

$$w_0 = w_n = \frac{\pi}{2n}, \quad w_i = \frac{\pi}{n}, \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n-1$$

e si calcola

$$I_{appx} = \sum_{k=0}^{n} f(x_i) w_i$$

allora

$$I_{appx} \text{ è una approssimazione di } \int_{-1}^{1} f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ e non di } \int_{-1}^{1} f(x) dx.$$

Comando integral di MATLAB

integral implementa una formula di quadratura adattiva (cioè in cui il numero di nodi è scelto dal metodo con l'obiettivo di ottenere un errore di quadratura minore di una tolleranza fissata), sfruttando i nodi di Gauss-Legendre.

Per approssimare l'integrale $\int_a^b f(x)dx$, l'istruzione di chiamata è:

```
q = integral(fun,a,b)
```

Esempio:
Per approssimare

$$\int_0^2 \frac{1}{x^3-2x-5}dx$$

con un errore al più pari a 10^{-10} digitare le istruzioni

```
f=@(x)1./(x.^3-2*x-5);
I=integral(f,0,2)
```

per cambiare la tolleranza:

```
f=@(x)1./(x.^3-2*x-5);
I=integral(f,0,2,'AbsTol',1.e-5)
```

N.B. Di default `AbsTol=1.e-10`.