

Esercizio (da un tema d'esame)

Si considerino le due curve di equazione:

$$y_1 = f_1(x) = \frac{1}{3} \log\left(\frac{x}{2}\right) + x^2, \quad y_2 = f_2(x) = x^2 + x - 2.$$

1. Localizzare per via grafica le intersezioni tra le due curve.
2. Si consideri il metodo di bisezione per il calcolo delle ascisse dei punti di intersezione. Determinare per via teorica il numero di iterazioni che servono al metodo di bisezione per ottenere una soluzione numerica con un errore minore di $\text{tol} = 10^{-8}$, considerando un intervallo iniziale di ampiezza pari a 1. Si possono calcolare entrambe le ascisse dei punti di intersezione con il metodo di bisezione utilizzando un intervallo di ampiezza 1? Giustificare la risposta. Calcolare le radici con il metodo di bisezione utilizzando un intervallo iniziale opportuno.

3. Calcolare numericamente le ascisse dei punti di intersezione con il metodo di Newton utilizzando $\text{tol} = 10^{-10}$, $\text{nmax} = 50$.

4. Proporre su carta una funzione di punto fisso $\varphi(x)$, tale che il punto fisso di $\varphi(x)$ coincida con la maggiore delle ascisse dei punti di intersezione tra le due curve date e, giustificando la risposta, dire se la funzione di punto fisso proposta produce una successione convergente o meno.