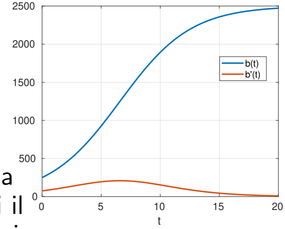
Un problema di ottimizzazione

Dinamica delle popolazioni. Una colonia di 250 esemplari di batteri viene posta in un ambiente isolato e si riproduce seguendo il modello di Verhulst

$$b(t) = \frac{2500}{1+9e^{-t/3}}, \quad t > 0,$$

dove t rappresenta il tempo (espresso in giorni) trascorso a partire dal tempo $t = 0$ di inizio della coltura. Si vuole determinare dopo quanti giorni il tasso di crescita della popolazione di batteri raggiunge il valore massimo.



Modello di Verhulst: la numerosità della popolazione cresce tendendo asintoticamente ad un certo valore detto *capacità portante*, maggiore è la numerosità e minore è la velocità di crescita della numerosità stessa a causa di competizioni interne per spazio e nutrimento. Qui la capacità portante è $\lim_{t\to\infty} b(t) = 2500$.

Tasso di crescita=variazione istantanea, cioè $b'(t)$.

Svolgimento

Dobbiamo trovare il punto di massimo del tasso di crescita, cioè il punto di massimo di $b'(t)$. Dal grafico vediamo che il punto di massimo di $b'(t)$ è l'unico punto stazionario di $b'(t)$, ovvero tale che $(b')' = 0$. Quindi poniamo

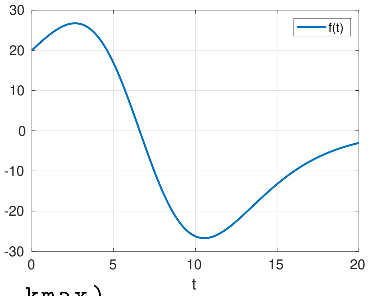
$$f(t) = b''(t)$$

e calcoliamo l'unica radice di $f(t) = 0$.

Per calcolare velocemente $b''(t)$:

```
syms t % t  variabile simbolica
b=2500/(1+9*exp(-t/3)); % b e' una funzione simbolica
b2=diff(b,2); % calcolo b'' simbolicamente
f=matlabFunction(b2); % trasformo b2 in function hand
```

Rappresentare graficamente `f`,
localizzare la radice,
definire i dati e richiamare il metodo delle secanti.



Le istruzioni

```
x0=5; x1=9;
tol=1e-8; kmax=20;
[z,res,k]=secanti(f,x0,x1,tol,kmax)
```

producono

```
z =
      6.591673732008658e+00
res =
      2.842170943040401e-14
k =
      5
```

Il massimo tasso di crescita si ha dopo 6.59 giorni dall'inizio della coltura.

Esercizio:

Calcolare il punto di minimo della funzione $h(x) = (x-5)^2 - 3\sin(x-5)$ con $x \in [0, 10]$ utilizzando il metodo di Newton, prendendo prima $x^{(0)} = 0$ e poi $x^{(0)} = 1$.
Confrontare il numero di iterazioni necessarie per arrivare a convergenza avendo preso la stessa tolleranza per il test d'arresto e capire perché il numero di iterazioni richieste dal metodo di Newton è così diverso nei due casi.