RADICI DI UN POLINOMIO

Dato il polinomio $p \in \mathbb{P}^n$

$p(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x^2 + a_n x + a_{n+1}$

cerco $x_1, x_2, \ldots., x_n : \; p(x_n) = 0.$

1) Costruisco il vettore a contenente i coefficienti a_i a partire da a_1.
2) Richiamo il comando matlab

`x=roots(a)`

x è il vettore delle radici.

Esempio:calcolare le radici di
$p(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6.$

```
>> a=[1 -3 -3 7 6];
>> x=roots(a);
x =
    3.0000 + 0.0000i
    2.0000 + 0.0000i
   -1.0000 + 0.0000i
   -1.0000 - 0.0000i
```

```
>> format long e
>> x
x =
   3.000000000000001e+00 + 0.000000000000000e+00i
   1.999999999999998e+00 + 0.000000000000000e+00i
  -9.999999999999996e-01 + 1.229656911965825e-08i
  -9.999999999999996e-01 - 1.229656911965825e-08i
```

N.B.

Calcolare

```
x-ones(4,1)
```

Le radici semplici sono calcolate correttamente fino alla 15-sima cifra, la radice doppia fino alla settima, ottava.

Come vengono calcolate le radici di $p_n(x) \in \mathbb{P}_n$

Il metodo di Newton-Hörner è una variante del metodo di Newton per calcolare tutte le radici di un polinomio.

1. si calcola una prima radice r_1 di $p_n(x)$ con il metodo di Newton scegliendo un opportuno punto iniziale $x^{(0)}$,
2. si costruisce il polinomio $p_{n-1}(x) = \frac{p_n(x)}{(x-r_1)}$ (di grado $n-1$) (si opera cioè una **deflazione** (abbassamento di grado), tutte le radici di $p_{n-1}(x)$ sono le restanti $n-1$ radici di $p_n(x)$;
3. si calcola una radice (la chiamo r_2) di $p_{n-1}(x)$ con il metodo di Newton prendendo $x^{(0)} = r_1$;
4. si costruisce il polinomio $p_{n-2}(x) = \frac{p_{n-1}(x)}{(x-r_2)}$ (di grado $n-2$), tutte le radici di $p_{n-2}(x)$ sono le restanti $n-2$ radici di $p_{n-1}(x)$;
5. ... ecc. finché non ho calcolato tutte le radici.

Analisi di stabilità per calcolo di radici

Sia α la radice di $f(x) = 0$,
$\hat{\alpha}$ la radice calcolata numericamente.
Se α è radice semplice, si ha:

$$\frac{|\hat{\alpha} - \alpha|}{|\alpha|} \leq C\epsilon_M \tag{1}$$

Se α è radice multipla di $f(x) = 0$ con molteplicità m,
si ha:

$$\frac{|\hat{\alpha} - \alpha|}{|\alpha|} \leq C \sqrt[m]{\epsilon_M} \tag{2}$$

L'equazione $p(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = 0$ ha due radici semplici e una radice doppia.
In Matlab $\epsilon_M \simeq 2.22e - 16$, quindi per la radice semplice l'errore è circa $\epsilon_M \simeq 10^{-16}$, mentre per la radice doppia l'errore è circa $\epsilon_M^2 \simeq 10^{-8}$.

Esercizio.

Calcolare le radici del polinomio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ con il comando roots di matlab.

Si trova

```
alpha =
  1.000219151659574e+00 + 0.000000000000000e+00i
  9.999999832294281e-01 + 2.191348848513377e-04i
  9.999999832294281e-01 - 2.191348848513377e-04i
  9.997808818815743e-01 + 0.000000000000000e+00i
```

Calcolare

```
alpha-ones(4,1)
```

Le radici calcolate distano da quelle vere ($\alpha = 1$ con molteplicità 4) circa di 10^{-4}.