Prob. di Cauchy vettoriale

Esempio. Determinare $y_1(t), y_2(t)$ soluzioni di

$$\begin{cases} y_1'(t) = -3y_1(t)y_2(t) + y_1(t) & t \in (0, 50] \\ y_2'(t) = -y_2(t) + y_1(t)y_2(t) & t \in (0, 50] \\ y_1(0) = y_{0,1} = 1, \\ y_2(0) = y_{0,2} = 1 \end{cases}$$

Prob. di Cauchy vettoriale

Esempio. Determinare $y_1(t), y_2(t)$ soluzioni di

$$\begin{cases} y_1'(t) = -3y_1(t)y_2(t) + y_1(t) & t \in (0, 50] \\ y_2'(t) = -y_2(t) + y_1(t)y_2(t) & t \in (0, 50] \\ y_1(0) = y_{0,1} = 1, \\ y_2(0) = y_{0,2} = 1 \end{cases}$$

Poniamo:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{bmatrix} F_1(t, y_1(t), y_2(t)) \\ F_2(t, y_1(t), y_2(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3y_1(t)y_2(t) + y_1(t) \\ -y_2(t) + y_1(t)y_2(t) \end{bmatrix}$$

Allora il sistema dato diventa in forma compatta:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) & t \in (t_0, T] \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

I metodi visti si possono adattare al caso vettoriale:
Eulero esplicito

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\mathbf{F}(t_n, \mathbf{u}_n) & n \geq 0 \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

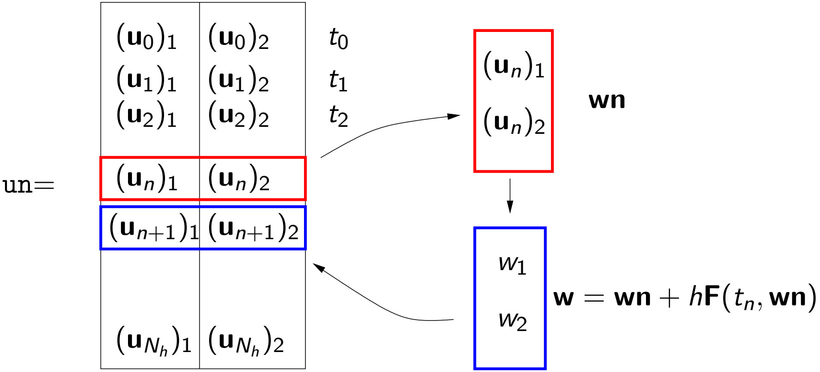
Eulero implicito

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\mathbf{F}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) & n \geq 0 \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

(per risolvere il sistema non lineare si può utilizzare il metodo di Broyden (generalizzazione di secanti) (scaricare dalla pagina del corso la function `broyden.m`)

```
B0=eye(length(w0),1)); % matrice identita'
[zero,res,niter,Err]=broyden(fun,B0,w0,tol,kmax)
```

Adattare il metodo di Eulero esplicito alla risoluzione dell'equazione vettoriale.
$\mathbf{y}_0$ può essere vettore riga o colonna.
`un` è un array a due indici, nella prima colonna c'è la approssimazione della prima componente $y_1(t_n)$, nella seconda colonna c'è l'approssimazione della seconda componente $y_2(t_n)$.



La funzione `f=odefun(t,y)` prende in input `t` scalare e `y` vettore colonna e produce il vettore `f` della stessa dimensione di `y` (colonna)

Esercizio (esodesys1)

Risolvere il sistema

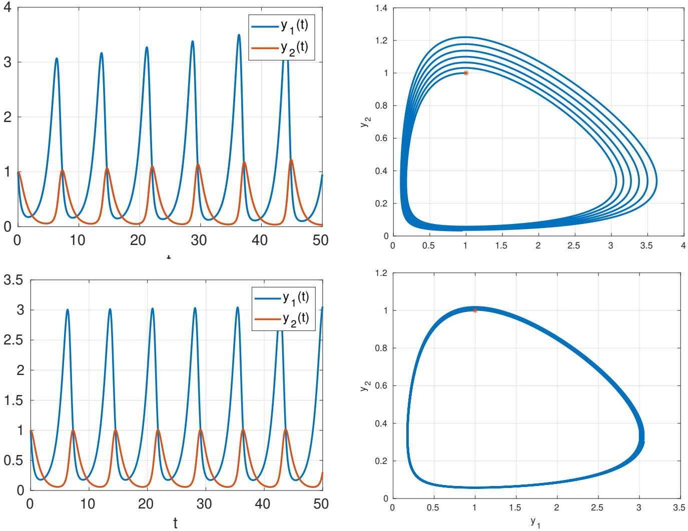
$$\begin{cases} y_1'(t) = -3y_1(t)y_2(t) + y_1(t) & t \in (0, 50] \\ y_2'(t) = -y_2(t) + y_1(t)y_2(t) & t \in (0, 50] \\ y_1(0) = y_{0,1} = 1, \\ y_2(0) = y_{0,2} = 1 \end{cases}$$

con Eulero esplicito, prima con $h = 10^{-2}$ e poi con $h = 10^{-3}$.

Svolgimento. Scrivere un m.file in cui si definiscono i dati del problema, si richiama la function `eulero_esp_s.m` e si disegnano le componenti della soluzione numerica
In un secondo grafico rappresentare la traiettoria del sistema nel piano delle fasi, cioè y_1 in ascissa e y_2 in ordinata.

Soluzioni ottenute con Eulero esplicito

In alto le soluzioni ottenute con $h = 0.01$, in basso le soluzione ottenute con $h = 0.001$.



Analisi dei risultati numerici

1. Se studio i punti di equilibrio del sistema, mi aspetto che ci sia un ciclo limite e che la soluzione sia periodica (vedi corsi di 'Fondamenti di Automatica' e 'Modellistica e Simulazione'):

   $$\begin{cases} -3y_1y_2 + y_1 = 0 \\ -y_2 + y_1y_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow P = (1, 1/3)$$

   Si costruisce la matrice Jacobiana di $F(t, y)$, la si valuta in P e si calcolano gli autovalori. Risultano λ_1 e λ_2 immaginari puri, quindi P è il centro di un ciclo limite e la soluzione è periodica.
2. La soluzione di Eulero esplicito invece dà una spirale divergente.
3. Perché?

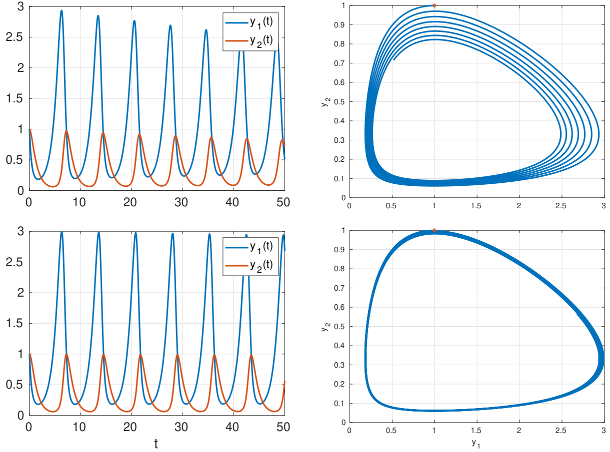
Eulero implicito per sistemi

La funzione `f=odefun(t,y)` prende in input `t` scalare e `y` vettore colonna e produce il vettore `f` della stessa dimensione di `y` (colonna).
Generalizzare la function `eulero_imp` a sistemi di equazioni differenziali.

```
function [tn,un]=eulero_imp_s(odefun,tspan,y0,Nh,varargin)
if nargin == 4
 tol=1.e-8;nmax=20;pflag=0;
else
 tol=varargin{1}; nmax=varargin{2}; pflag=varargin{3};
end
tn=linspace(tspan(1),tspan(2),Nh+1)';
h=(tspan(2)-tspan(1))/Nh;
y0=y0(:); % y0 diventa colonna
d=length(y0); % d=dimensione del sistema di e.d.o.
un=zeros(Nh+1,d);
un(1,:)=y0.'; % .'  trasposto anche per var complesse
B0=eye(d);
for n=1:Nh
  wn=un(n,:)'; % voglio che wn sia colonna perche'
   % la seconda variabile di odefun e' vettore colonna e
   % restituisce un vettore colonna
  r=@(x)x-wn-h*odefun(tn(n+1),x);
  [z]=broyden(g,B0,wn,tol,nmax,pflag);
  un(n+1,:)=z.';
end
```

Soluzioni ottenute con Eulero implicito

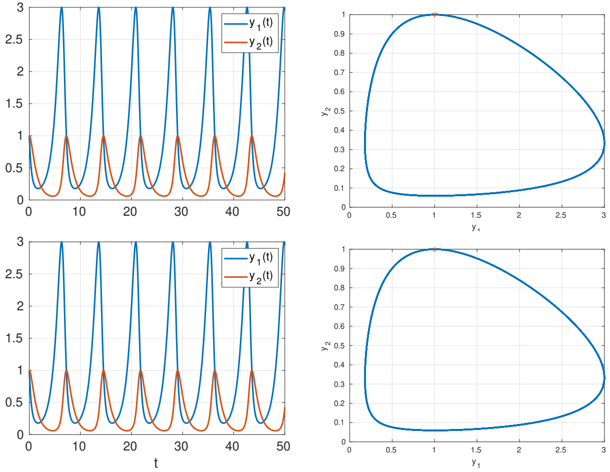
In alto le soluzioni ottenute con $h = 0.01$, in basso le soluzione ottenute con $h = 0.001$.



Qui la soluzione è una spirale convergente

Soluzioni ottenute con Crank-Nicolson

In alto le soluzioni ottenute con $h = 0.01$, in basso le soluzione ottenute con $h = 0.001$.



Qui la soluzione è un ciclo perfetto!

Esercizio (esodesys2): pdC del secondo ordine

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 9y = e^{-2t} & t \in [0,5] \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \sqrt{11}/2 \end{cases} \tag{1}$$

Scrivere il sistema vettoriale del primo ordine

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

associato all'equazione data.
Risolvere l'equazione data con il metodo di Eulero esplicito, prendendo $h = 0.1$ e $h = 0.01$ e rappresentare graficamente la soluzione $y(t)$.
È più accurata la soluzione ottenuta con $h = 0.1$ o $h = 0.01$?
Giustificare adeguatamente la risposta in base alla teoria studiata.

Da un'equazione di ordine 2 ad un sistema di ordine 1

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 9y = e^{-2t} & t \in [0,5] \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \sqrt{11}/2 \end{cases} \tag{2}$$

1. Poniamo $y_1 = y$ e
$$y_2 = y_1' (= y'), \tag{3}$$
2. $y'' + 5y' + 9y = e^{-2t}$ diventa
$$y_2' + 5y_2 + 9y_1 = e^{-2t}, \tag{4}$$
3. scriviamo (3) e (4) a sistema con le derivate a sinistra e tutto il resto a destra dell'uguale:
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -9y_1 - 5y_2 + e^{-2t} \end{cases} \tag{5}$$
4. Le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = \sqrt{11}/2$ diventano $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = \sqrt{11}/2$.
5. Infine riscrivo tutto come sistema.