Convergenza di un metodo per e.d.o.

Def. Un **metodo** per l'approssimazione di e.d.o. è **convergente** se esiste una funzione $C(h)$ positiva e infinitesima per $h \to 0$ ed esiste $h_0 > 0$ tale che

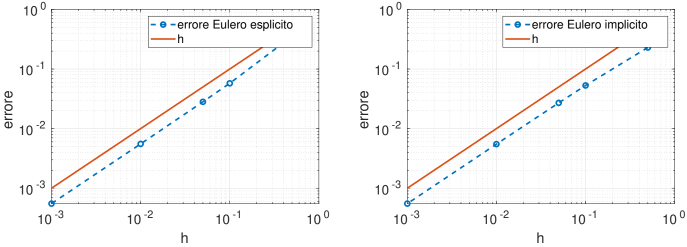
$$e(h) := \max_{0 \leq n \leq N_h} |y_n - u_n| \leq C(h) \qquad \forall h \leq h_0.$$

$e(h)$ è detto **errore del metodo**. Inoltre se esistono $c > 0$ e $q > 0$ tale che

$$e(h) \sim c\ h^q \qquad \text{per } h \to 0,$$

allora il metodo è **convergente di ordine** q rispetto ad h.

Errore dei metodi di Eulero



Dai grafici osserviamo che l'**errore dei metodi di Eulero** è

$$e(h) \sim ch \quad \text{per } h \to 0 \quad \Rightarrow$$

I metodi di Eulero sono convergenti di ordine 1 rispetto ad h

Metodo di Crank Nicolson

$$\begin{cases} u_0 \text{ dato} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})], \quad 0 \leq n \leq N_h - 1 \end{cases} \qquad (1)$$

E' un metodo implicito, convergente del secondo ordine rispetto ad h e ad un passo.

Scrivere la function

```
[tn,un]=cranknicolson(odefun,tspan,y0,Nh)
```

INPUT:

`odefun`: espressione della f

`tspan=[t0,T]`: vettore con istante iniziale e finale dell'intervallo

`y0`: valore scalare: la condizione iniziale

`Nh`: numero intero di passi temporali (Nh è tale che $T = t_{Nh}$).

OUTPUT:

`tn`: vettore colonna contenente gli istanti temporali da t_0 a t_{Nh}.

`un`: vettore colonna contenente la soluzione numerica negli istanti temporali t_n.

In Crank Nicolson, ad ogni passo dobbiamo risolvere l'equazione non lineare avente incognita u_{n+1}:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] \Leftrightarrow$$
$$r(u_{n+1}) = u_{n+1} - u_n - \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] = 0$$

La funzione g da dare in input a secanti sarà:

```
r=@(x)x-un(n)-h/2*(odefun(tn(n),un(n))+odefun(tn(n+1),x));
```

Esercizio. Determinare sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo di Crank-Nicolson.

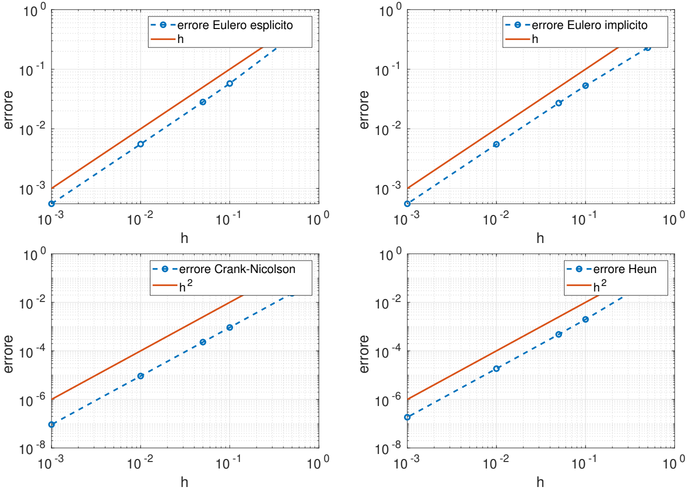
Metodo di Heun

$$\begin{cases} u_0 \text{ dato} \\ u^*_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u^*_{n+1})], \quad 0 \leq n \leq N_h - 1 \end{cases} \tag{2}$$

Abbiamo trasformato il metodo di Crank-Nicolson implicito in un metodo esplicito, in cui facciamo una prima valutazione u^*_{n+1} di u_{n+1} (predizione) e poi la correggiamo.

Esercizio. Scrivere la function `heun.m` che implementa il metodo e determinare sperimentalmente l'ordine di convergenza.

Gli errori per i quattro metodi visti



I metodi di Crank-Nicolson e Heun sono convergenti di ordine 2 rispetto ad h.