METODO DI EULERO ESPLICITO

$$\begin{cases} u_0 \text{ dato} \\ u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \quad 0 \leq n \leq N_h - 1 \end{cases} \tag{1}$$

Scrivere una function

`[tn,un]=eulero_esp(odefun,tspan,y0,Nh)`

INPUT:

`odefun`: espressione della f

`tspan=[t0,T]`: vettore di 2 componenti: istante iniziale e finale dell'intervallo

`y0`: valore scalare: la condizione iniziale

`Nh`: numero (intero) di passi temporali (Nh è tale che $T = t_{Nh}$).

OUTPUT:

`tn`: vettore colonna contenente gli istanti temporali da t_0 a t_{Nh}.

`un`: vettore colonna contenente la soluzione numerica negli istanti temporali t_n.

N.B. esprimere f in funzione di due variabili t e y con y non dipendente da t.
ES: $f(t, y) = t - y(t)$: diventa `f=@(t,y)t-y`

N.B. Generare il vettore dei `tn` con il comando `linspace`:
`tn=linspace(tspan(1),tspan(2),Nh+1);`
Inizializzare il vettore `un` della stessa dimensione di `tn`
e memorizzare nella prima componente di `un` il valore di y_0.
Con un ciclo costruire sequenzialmente le componenti del vettore `un`

Esercizio 1

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t - y & t \in (-1, 3] \\ y(-1) = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Scrivere un m-file che:

1) richiami la function `eulero_esp.m` con $h = 0.5$ (calcolare $N_h = (T - t0)/h$ e prendere la parte intera (usare `fix`, `ceil`, `round`));

2) rappresenti graficamente la soluzione numerica e quella esatta (fuori dalla function `eulero_esp.m`).

La soluzione esatta è: $y(t) = t - 1 + 3e^{-(t+1)}$.

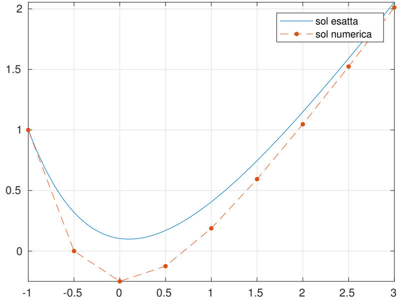
3) calcoli l'errore

$$e_h = \max_{n=0,\dots,N_h} |y(t_n) - u_n|$$

(fuori dalla function `eulero_esp.m`) e stamparlo a video

Sol. Si ottiene `err=0.3536`

I grafici della soluzione numerica e di quella esatta sono:



Esercizio 2

Ripetere il lavoro dell'esercizio precedente con $h = 0.5$, $h = 0.25$, $h = 0.125$.

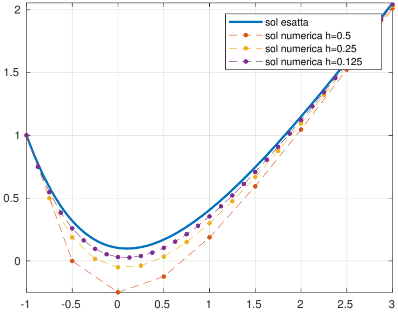
Per ogni valore di h rappresentare le soluzioni numeriche trovate, calcolare e stampare a video l'errore $e_h = \max_{n=0,\dots,N_h} |y(t_n) - u_n|$.

Domande:

1. Dimezzando h, cosa succede all'errore?
2. Come dipende l'errore e_h da h per $h \to 0$?

Rappresentare su un grafico loglog gli errori e_h al variare di h, considerare anche valori di $h < 0.125$.

Le soluzioni numeriche



Quando h diminuisce, la soluzione numerica si avvicina alla soluzione esatta.

Questa è la CONVERGENZA del metodo numerico: la soluzione numerica converge alla soluzione esatta nella norma del massimo su tutto l'intervallo.

METODO DI EULERO IMPLICITO

$$\begin{cases} u_0 \text{ dato} \\ u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N_h - 1 \end{cases} \tag{3}$$

`[tn,un]=eulero_imp(odefun,tspan,y0,Nh)`

INPUT:
`odefun`: espressione della f
`tspan=[t0,T]`: vettore con istante iniziale e finale dell'intervallo
`y0`: valore scalare: la condizione iniziale
`Nh`: numero intero di passi temporali (Nh è tale che $T = t_{Nh}$).
OUTPUT:
`tn`: vettore colonna contenente gli istanti temporali da t_0 a t_{Nh}.
`un`: vettore colonna contenente la soluzione numerica negli istanti temporali t_n.

Ad ogni passo t_n dobbiamo risolvere l'equazione non lineare con incognita u_{n+1}:

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) \\ & \Updownarrow & \\ r(u_{n+1}) = u_{n+1} - u_n - hf(t_{n+1}, u_{n+1}) & = & 0 \end{array}$$

Attenzione: la funzione r cambia ad ogni passo t_n perchè dipende da u_n e da t_{n+1}.
L'equazione non lineare $r(u_{n+1}) = 0$ può essere risolta con secanti.
Utilizziamo la function `secant`

```
[z,res,it]=secant(fun,x0,x1,tol,kmax)
```

Cosa prendiamo come `x0` e `x1`?
Al primo passo temporale poniamo $x^{(1)} = u_0$ e $x^{(0)} = u_0 + h$.
Per i successivi passi temporali poniamo $x^{(1)} = u_n$ e $x^{(0)} = u_{n-1}$.

```
n=1
r=@(x)x-un(n)-h*odefun(tn(n+1),x);
un(n+1)=secant(r,un(n)+h,un(n),tol,kmax);

for n=2:Nh
    r=@(x)x-un(n)-h*odefun(tn(n+1),x);
    un(n+1)=secant(r,un(n-1),un(n),tol,kmax);
end
```

Esercizio 3.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t - y & t \in (-1, 3] \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

Scrivere un m-file che:

1) richiami la function `eulero_imp.m` con $h = 0.5$ (calcolare $N_h = (T - t0)/h$ e prendere la parte intera (usare `fix`, `ceil`, `round`));

2) rappresenti graficamente la soluzione numerica e quella esatta (fuori dalla function `eulero_imp.m`).

La soluzione esatta è: $y(t) = t - 1 + 3e^{-(t+1)}$.

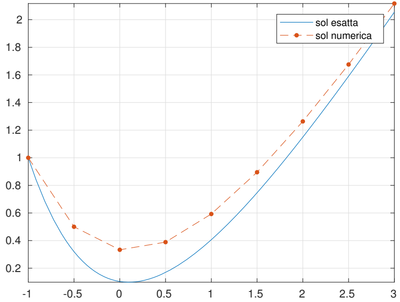
3) calcoli l'errore

$$e_h = \max_{n=0,\dots,N_h} |y(t_n) - u_n|$$

(fuori dalla function `eulero_imp.m`) e stamparlo a video

Sol. Si ottiene `err=0.2297`

I grafici della soluzione numerica e di quella esatta sono:



Esercizio 4

Ripetere il lavoro dell'esercizio precedente con $h = 0.5$, $h = 0.25$, $h = 0.125$.

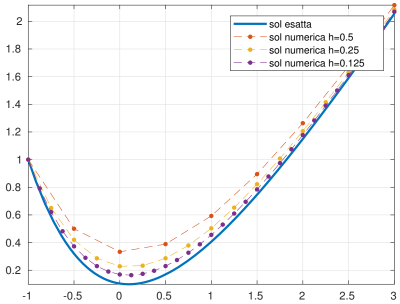
Per ogni valore di h rappresentare le soluzioni numeriche trovate, calcolare e stampare a video l'errore $e_h = \max_{n=0,\dots,N_h} |y(t_n) - u_n|$.

Domande:

1. Dimezzando h, cosa succede all'errore?
2. Come dipende l'errore e_h da h per $h \to 0$?

Rappresentare su un grafico loglog gli errori e_h al variare di h, considerare anche valori di $h < 0.125$.

Le soluzioni numeriche



Quando h diminuisce la soluzione numerica si avvicina alla soluzione esatta.

Questa è la CONVERGENZA del metodo numerico: la soluzione numerica converge alla soluzione esatta nella norma del massimo su tutto l'intervallo.