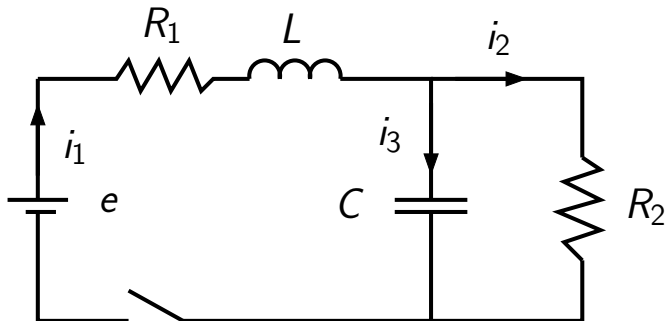


Approssimazione del potenziale ai capi di un condensatore all'interno di un circuito elettrico.

Si consideri il circuito rappresentato in figura:

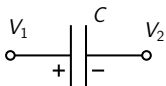


Si vuole approssimare l'andamento della differenza di potenziale $v(t)$ ai capi del condensatore C a partire dal tempo $t = 0$ in cui viene chiuso il circuito.

Leggi fisiche

- $i = \frac{dQ}{dt}$ (legame intensità - carica),

- $Q = C(V_1 - V_2)$



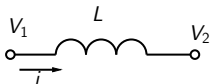
- $V_1 - V_2 = iR$ (legge di Ohm),



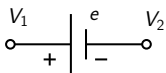
- 1a legge di Kirchhoff: $\sum_k i_k = 0$ in ogni nodo della rete

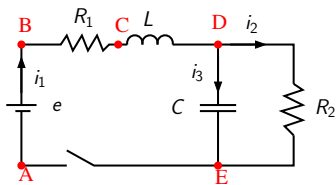
- 2a legge di Kirchhoff: $\sum_k (\Delta V)_k = 0$ in ogni maglia chiusa della rete

- $V_1 - V_2 = L \frac{di}{dt}$



- $V_1 - V_2 = e$





2a legge di Kirchoff sulla maglia sinistra:

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_E) + (V_E - V_A) = 0$$

$$-e + i_1 R_1 + L \frac{di_1}{dt} + v + 0 = 0$$

da cui $L \frac{di_1}{dt} = -R_1 i_1 - v + e$

1a legge di Kirchoff sul nodo D: $i_1 = i_2 + i_3$, con:

$$v = i_2 R_2, \text{ cioè } i_2 = \frac{v}{R_2}, \text{ e} \quad i_3 = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

da cui $C \frac{dv}{dt} = i_1 - \frac{v}{R_2}$

Denotando con $i_1 = i_1(t)$ l'intensità di corrente nella prima maglia e con $v = v(t)$ la differenza di potenziale ai capi del condensatore, applicando le leggi fisiche, otteniamo il **modello matematico**:

$$\begin{cases} v' = \frac{1}{C} \left(i_1 - \frac{v}{R_2} \right) \\ i_1' = \frac{1}{L} (-i_1 R_1 - v + e), \end{cases} \quad (1)$$

completato con le condizioni iniziali:

$$v(t_0) = 0 \text{ e } i_1(t_0) = 0.$$

R_1 , R_2 , C , L , e sono costanti nel tempo.

Facendo la sostituzione $y_1(t) = v(t)$ e $y_2(t) = i_1(t)$, si ha:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{1}{C} \left(y_2 - \frac{y_1}{R_2} \right) \\ y_2' = \frac{1}{L} (-y_2 R_1 - y_1 + e) \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Ponendo:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \left(y_2 - \frac{y_1}{R_2} \right) \\ \frac{1}{L} (-y_2 R_1 - y_1 + e) \end{bmatrix}$$

il sistema si riscrive in forma compatta:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) & t \geq t_0 \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Scrivere un m-file che

1. definisca i dati
2. risolva con Eulero esplicito (e in un secondo momento con Runge-Kutta4)
3. rappresenti il grafico del potenziale in funzione del tempo
4. rappresenti il grafico dell'intensità di corrente i_1 in funzione del tempo.

Si prendano i seguenti dati:

$$L = 0.1, R_1 = R_2 = 10, C = 1.e - 3, e = 5.$$

$$t_0 = 0, T = .1.$$

Si consideri dapprima $h = 0.001$, in un secondo momento $h = 0.005$, $h = 0.01$ e $h = 0.02$.

Si deve **costruire una function matlab** che, dati in input t scalare e \mathbf{y} vettore, costruisca il vettore $\mathbf{f} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ della stessa dimensione di \mathbf{y} (vettore colonna o riga a seconda di come è \mathbf{y}).

Prima possibilità: funzione \mathbf{F} definita con function handle

```
t0=0; tf=0.1; y0=[0,0];  
R1=10; R2=10; e=5; L=0.1; C=1.e-3;  
fcirc=@(t,y)[(y(2)-y(1)/R2)/C;  
              (-y(2)*R1-y(1)+e)/L];  
Nh=...;  
  
[tn,un]=eulero_esp(fcirc,tspan,y0,Nh);
```

Seconda possibilità: funzione **F** costruita in un m-file con nome `fcirc.m`

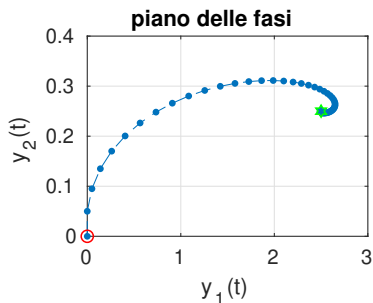
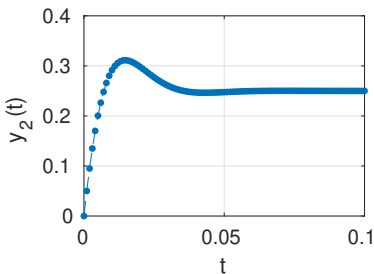
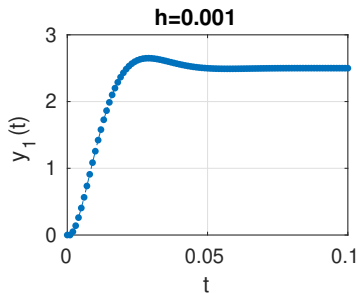
```
function [f]=fcirc(t,y);  
R1=10; R2=10; e=5; L=0.1; C=1.e-3;  
f=zeros(size(y));  
f(1)=(y(2)-y(1)/R2)/C;  
f(2)=(-y(2)*R1-y(1)+e)/L;
```

La chiamata ad `eulero_esp` è:

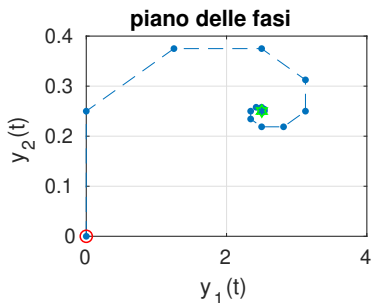
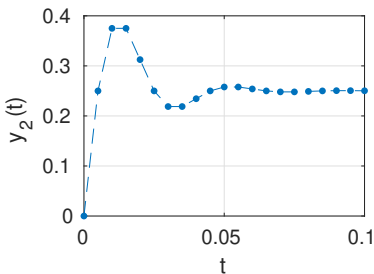
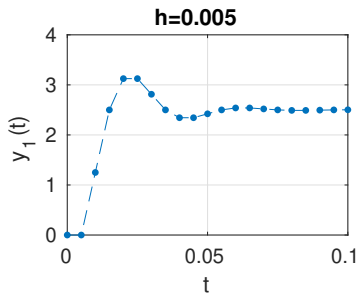
```
tspan=... ; y0=... ; Nh=... ;  
[tn,un]=eulero_esp(@fcirc,tspan,y0,Nh)
```

Il primo argomento in input ad `eulero_esp` deve essere un function handle, quindi il nome della function deve essere preceduto da `@`

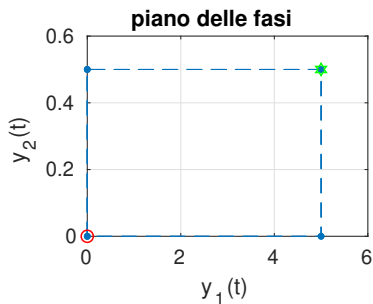
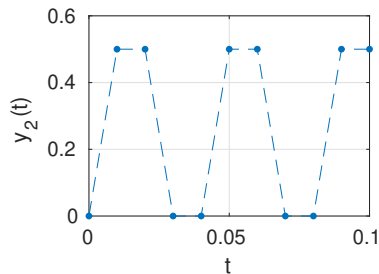
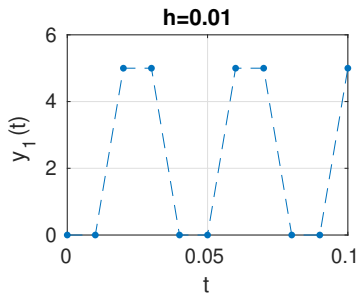
Risultato per $L=0.1$; $C=1.e-3$; $R1=R2=10$; $e=5$; $h=0.001$



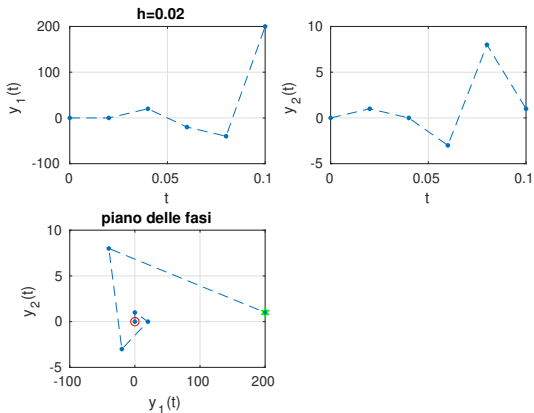
Soluzione per $h = 0.005$



Soluzione per $h = 0.01$



Soluzione per $h = 0.02$



La soluzione numerica con $h = 0.001$ è buona, quella con $h = 0.005$ è poco accurata, quella con $h = 0.01$ presenta delle oscillazioni non realistiche, quella con $h = 0.02$ “esplode” (blow-up). Sono **oscillazioni numeriche**, dovute alla **manca di stabilità assoluta**.

Stabilità assoluta per sistemi di eq

Poiché il sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ è lineare, si ha

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}.$$

dove $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^2$ sono una matrice ed un vettore indipendenti dal tempo.

Il termine costante \mathbf{g} si può non considerare perchè non influisce sull'analisi della stabilità assoluta.

$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ è la controparte vettoriale di $y'(t) = \lambda y(t)$

Gli autovalori di A giocano il ruolo di λ .

Un metodo risulta assolutamente stabile per un certo valore di h se $h\lambda_i$ cade nella regione di assoluta stabilità del metodo per ogni autovalore λ_i della matrice A .

Determinare la matrice A , calcolarne gli autovalori e determinare limitazioni su h affinché Eulero esplicito sia assolutamente stabile. I risultati numerici ottenuti concordano con quanto si è trovato per via teorica?

Se i dati sono: $L=0.1$; $C=1e-3$; $R1=R2=10$; $e=5$
si ha:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 1000 \\ -10 & -100 \end{bmatrix}.$$

Si ha $\lambda_{1,2}(A) = -100 \pm 100i$, quindi la condizione di assoluta stabilità per EE è

$$h < \frac{-2\text{Re}(\lambda_i(A))}{|\lambda_i(A)|^2} = 0.01$$

Effettivamente, i risultati numerici mostrano che per $h < 0.01$ la soluzione numerica tende ad uno stato stazionario senza oscillazioni, mentre se $h = 0.01$ si hanno oscillazioni di ampiezza costante nel tempo. Se si considera $h > 0.01$ si ottengono oscillazioni di ampiezza crescente nel tempo.

Risoluzione con Runge-Kutta 4

Lo schema RK4 è esplicito, ad un passo, convergente di ordine 4 rispetto a h , con regione di assoluta stabilità limitata:

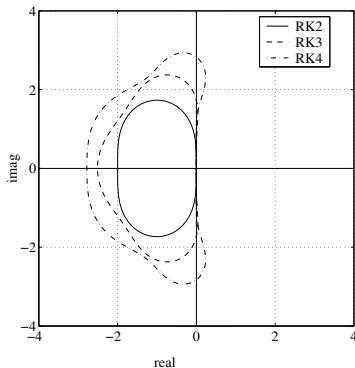
$$K_1 = f(t_n, u_n);$$

$$K_2 = f\left(t_{n+1/2}, u_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_{n+1/2}, u_n + \frac{h}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = f\left(t_{n+1}, u_n + hK_3\right)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$



Scaricare rk4 dalla pagina matlab del corso.

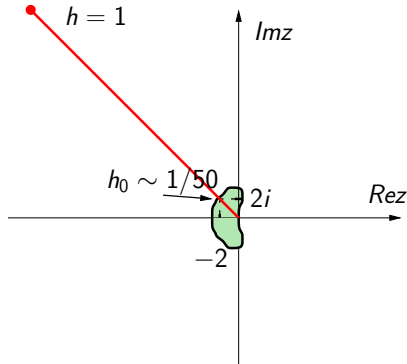
```
[tn,un]=rk4(odefun,tspan,y0,Nh)
```


Scelta di h che garantisca assoluta stabilità a RK4

Riprendiamo la matrice A del sistema ed i suoi autovalori

$$\lambda_1 = -100 + 100i$$

$$h = 1$$

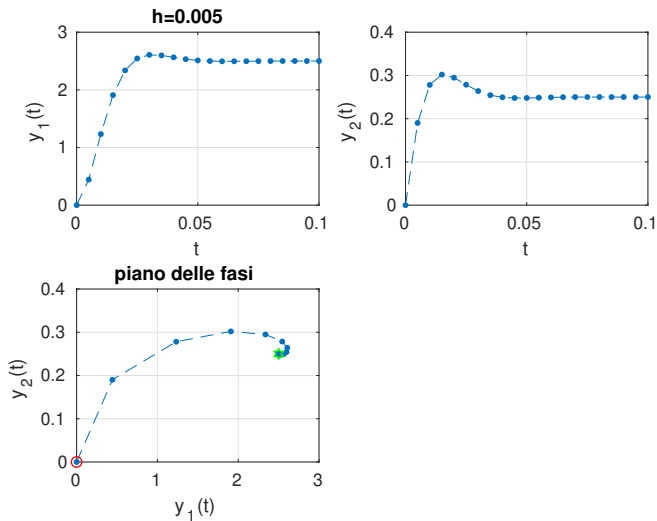


Se $h < h_0 \sim 1/50$, allora $h\lambda_1 \in \mathcal{A}_{RK4}$ (cioè $h\lambda_1$ cade nella regione di ass. stab.) ed il metodo risulta assolutamente stabile.

La limitazione con $\lambda_2 = -100 - 100i$ è uguale perché la regione di assoluta stabilità è simmetrica.

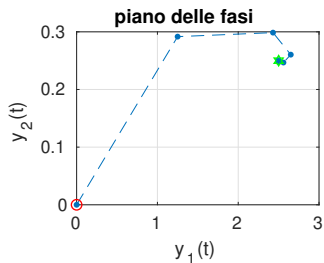
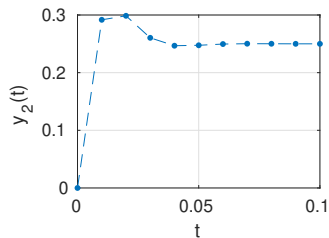
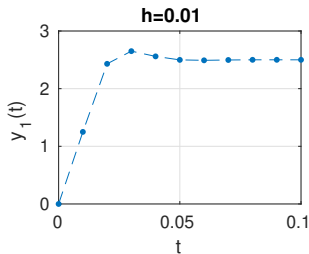
RK4, $h = 0.005$

Risultato per $L=0.1$; $C=1 \cdot e^{-3}$; $R_1=R_2=10$; $e=5$;



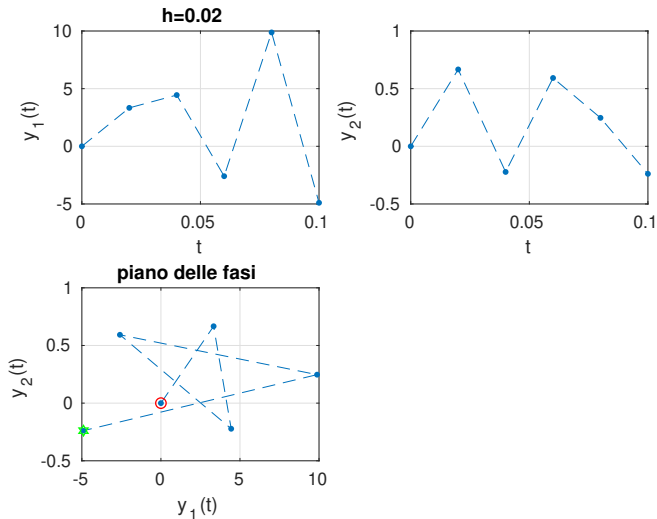
Lo schema è ass. stabile con questa scelta di h

RK4, $h = 0.01$



Lo schema è ass. stabile con questa scelta di h

RK4, $h = 0.02$



Lo schema NON è ass. stabile con questa scelta di h

Risoluzione con Eulero implicito

Si considerino gli stessi valori di h utilizzati con Eulero esplicito:
 $h = 0.001$, $h = 0.005$, $h = 0.01$ e $h = 0.02$.

Al crescere di h la soluzione ottenuta con Eulero implicito è sempre meno accurata, ma non si generano oscillazioni.

Eulero implicito infatti è assolutamente stabile per ogni valore di $h > 0$ e quindi la soluzione numerica del problema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ (con $\mathbf{g} = \mathbf{0}$) tenderà a zero per $t_n \rightarrow \infty$, anche con h grande.