31/10/23

SISTEMI LINEARI SOVRADETERMINATI

n. eqz > n. incognite

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

~~se~~ $x_1 = 1$
$x_2 = -1$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m > n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ dati

? $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

1) $\exists$ sol $\underline{x}$ di $A\underline{x} = \underline{b}$ in senso classico

$$A \cdot \underline{x} = \underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n$$ = combinazione lineare dei vettori colonna di A

Def: $R(A)$ = range (A) = l'insieme di tutti i vettori che possono essere scritti come comb lineari dei vettori colonna di A

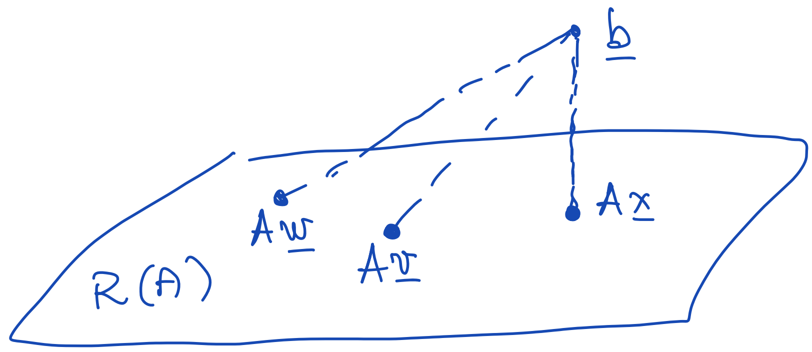
se $\underline{b} \in R(A) \Rightarrow A\underline{x} = \underline{b}$ è possibile

$\uparrow$

$\Rightarrow \exists$ sol $\underline{x}$ in senso classico

2) $\underline{b} \notin R(A)$, $\nexists$ soluz in senso classico del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$

$$\nexists\, \underline{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \quad A\underline{x} = \underline{b}$$



(1) cerco $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$: $\quad \|\underline{b} - A\underline{x}\|_2 \le \|\underline{b} - A\underline{v}\|_2 \quad \forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

questo $\underline{x}$ è la sol del sist $A\underline{x} = \underline{b}$ nel senso dei minimi quadrati

(2) cioè $\quad \|\underline{b} - A\underline{x}\|_2 = \min\limits_{\underline{v}\in\mathbb{R}^n} \|\underline{b} - A\underline{v}\|_2$

$$\Updownarrow$$

(3) $\quad \|\underline{b} - A\underline{x}\|_2^2 = \min\limits_{\underline{v}\in\mathbb{R}^n} \|\underline{b} - A\underline{v}\|_2^2$

Chiamo $\underline{\Phi}(\underline{v}) = \|\underline{b} - A\underline{v}\|_2^2 = (\underline{b} - A\underline{v})^T(\underline{b} - A\underline{v}) =$

$\|\underline{v}\|_2 = \sqrt{\underline{v}^T\underline{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$

$\underline{x}^T\underline{y} = \underline{y}^T\underline{x}$

$= \underline{b}^T\underline{b} - (A\underline{v})^T\underline{b} - \underline{b}^T A\underline{v} + (A\underline{v})^T A\underline{v} =$

$= \underline{b}^T\underline{b} - \underbrace{\overbrace{\underline{v}^T A^T}^{x^T}\overbrace{\underline{b}}^{y}} - \underbrace{\overbrace{\underline{b}^T}^{y^T}\overbrace{A\underline{v}}^{x}} + \underline{v}^T A^T A\underline{v} =$

$= \underline{b}^T\underline{b} - 2\,\underline{v}^T A^T\underline{b} + \underline{v}^T A^T A\underline{v} = \underline{\Phi}(\underline{v})$

? $\min\limits_{\underline{v}\in\mathbb{R}^n} \underline{\Phi}(\underline{v})$

$\left(\underline{\Phi}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{x}^T A\underline{x} - \underline{x}^T\underline{b} \right)$ gradiente

se i vettori colonna di A sono lin indip
allora A^TA risulta sdp

<u>Assunzione</u> : vett colonna di A lin indip.

cerco il pto di minimo di $\underline{\Phi}$ imponendo

$$\nabla \underline{\Phi}(\underline{v}) = \underline{0}$$

si trova $\nabla \underline{\Phi}(\underline{v}) = 2A^TA\underline{v} - 2A^T\underline{b}$

$$\cancel{2}A^TA\underline{v} - \cancel{2}A^T\underline{b} = 0$$

$\longrightarrow \boxed{A^TA\underline{v} = A^T\underline{b}}$ è un sist lineare quadrato con matrice A^TA sdp

$$A = \square \Rightarrow A^TA = \underbrace{\square}_{2\times 3}\ \underbrace{\square}_{3\times 2} = 2\times 2$$

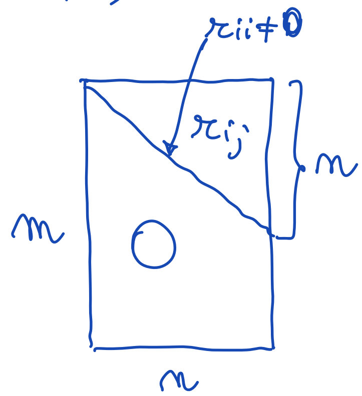
1) Choleski (fatt per mat. sdp)
2) GC
3) fattorizzazione QR

la soluzione di $A^TA\underline{v} = A^T\underline{b}$ è la soluzione $\underline{x}$ nel senso dei minimi quadrati del sistema rett. $A\underline{x} = \underline{b}$

Fattorizzazione QR di una matrice rettangolare

Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\exists\, Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e ortogonale (cioè $Q^TQ=I$)
e $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $r_{ii} \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$ e
$r_{ij} = 0$ per $i > j$ t.c.

$$A = Q \cdot R$$



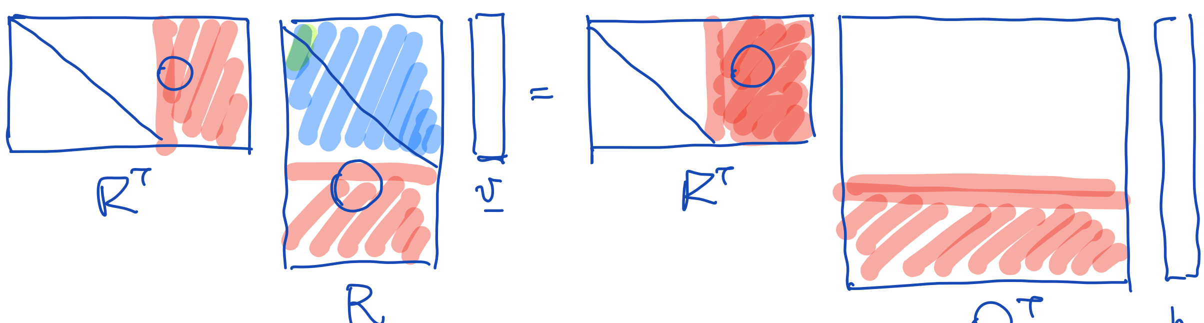
Riprendo $A^TA\underline{v} = A^T\underline{b}$ e sostituisco ad A la fatt QR

$$(QR)^T QR\,\underline{v} = (QR)^T \underline{b}$$

$$R^T \underbrace{Q^TQ}_{I} R\,\underline{v} = R^TQ^T\underline{b}$$

I perché Q è ortogonale

(4) $$R^TR\,\underline{v} = R^TQ^T\underline{b}$$



$\tilde{R} = R(1:n, :)$ $\tilde{Q} = Q(:, 1:n)$

(5) $$\tilde{R}^T\tilde{R}\,\underline{v} = \tilde{R}^T\tilde{Q}^T\underline{b}$$

(4) e (5) sono equivalenti per la presenza

degli zeri

ora $\tilde{R}$ è quadrata e non sing perché $r_{ii} \neq 0$
quindi posso eliminare $\tilde{R}^T$ dall'eqz (5)
(moltiplicando per $(\tilde{R}^T)^{-1}$ a sx e a dx dell'uguale)

$$(6) \qquad \tilde{R}\underline{v} = \tilde{Q}^T\underline{b}$$

sist quadrato
tr. sup.
($\Rightarrow$ sost all'indietro)

In conclusione, se devo risolvere $A\underline{x} = \underline{b}$
con A rettangolare:

1) calcolo la fatt QR di A $\quad$ ($[Q,R] = qr(A)$)

2) costruisco $\tilde{R}$ e $\tilde{Q}$

3) risolvo il sistema $\tilde{R}v = \tilde{Q}^T\underline{b}$
la soluz $\underline{v}$ è esattamente la sol di $A\underline{x} = \underline{b}$
nel senso dei minimi quadrati

$\underline{x} = A \backslash \underline{b}$ $\qquad$ con A rettangolare
Matlab calcola la fatt QR e poi
risolve nel senso dei min. quad