INTEGRAZIONE NUMERICA

21/11/23

Formule di quadratura

Dato: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile

? $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

- Appx $I(f)$ solo conoscendo i valori di f in certi punti $x_i \in [a,b]$ = nodi di quadratura
- Non voglio usare formule analitiche

$\exists$ delle funzioni come e^{-x^2}, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$ ....

che non sono integrabili elementarmente

(dato $f(x)$: 1) F primitiva di f

$F(x) = \int f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$)

Formule di q di tipo interpolatorio

Appx f con una funz $\tilde{f}$ che interpola f e poi

Appx $\underbrace{I(f) = \int_a^b f(x)\,dx}_{\text{quantità incognita}}$ con $\underbrace{I(\tilde{f}) = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx}_{\text{appx che calcolo}}$

Se $\tilde{f}(x)$ = polinomio di interp. globale di Lagrange

$$= p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\varphi_i(x)$$

polinomi della base di Lagrange

nodi di interpolazione

allora $\quad I(\tilde{f}) = I(p_n) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\underline{\varphi_i(x)}\,dx =$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \boxed{\int_a^b \varphi_i(x)\,dx} = w_i = \text{pesi di quadratura}$$

$$\boxed{\underline{I(f)} \sim I(p_n) = \underline{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,w_i} = \tilde{I}}$$

$$w_i = \int_a^b \varphi_i(x)\,dx = (b-a)\boxed{\int_0^1 \hat{\varphi}_i(\hat{x}_i)\,d\hat{x}} \quad \text{sostituz.}$$

$\hat{w}_i$

dove $\quad \hat{x} = \dfrac{x-a}{b-a} \in [0,1]$

e $\quad \hat{\varphi}(\hat{x}) = \varphi(x)$

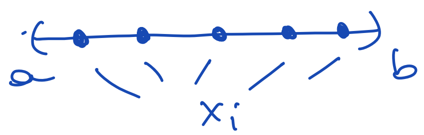
$\hat{w}_i$ pesi nell'intervallo di riferimento e possono essere tabulati

$\tilde{I} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,w_i$ assume valore $\neq$ a seconda della scelta di n, dei nodi di interpolaz = nodi di quadrat.

Formule di Newton-Cotes

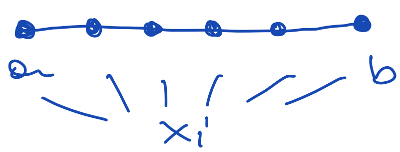
x_i equispaziati

Fdq di tipo aperto è una formula in cui i nodi x_i sono interni all'intervallo (a,b)



aperto

Fdq di tipo chiuso è una formula in cui gli estremi dell'interv a e b sono 2 degli $n+1$ nodi di quadratura

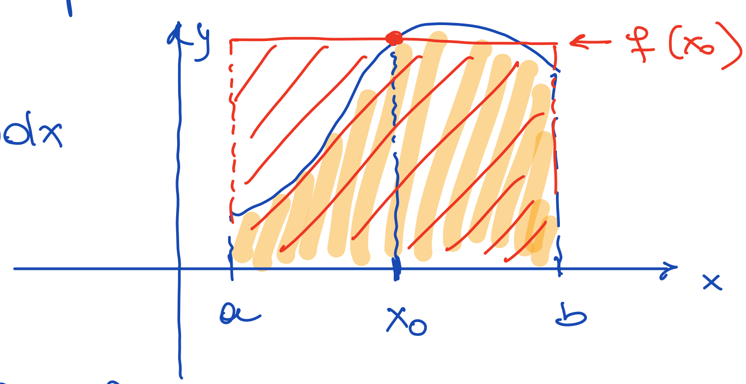


Formula del punto medio

$n=0$, aperta

Data $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$x_0 = \frac{b+a}{2}$ = punto medio dell'intervallo



$I(f) = \int_a^b f(x)dx$

$\tilde{I}$

$\tilde{I} = f(x_0) \cdot \underbrace{(b-a)}_{w_0}$

appx l'I con l'area di un rett. che ha per base l'amp. dell'interv. e altezza $= f(x_0)$

Partendo da $\tilde{I} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i$

se $f(x) \equiv 1$ ho $I = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)$

e $\tilde{I} = \sum_{i=0}^{n} w_i$

Si chiede a tutte le fdq di integrare esattam la funz $f(x) = 1$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} w_i = (b-a)$$

se $n = 0 \Rightarrow w_0 = b-a$

Teorema PM: Se $f \in C^2([a,b])$ allora $\exists\, \xi \in (a,b)$:

$$I - \tilde{I}_{PM} = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

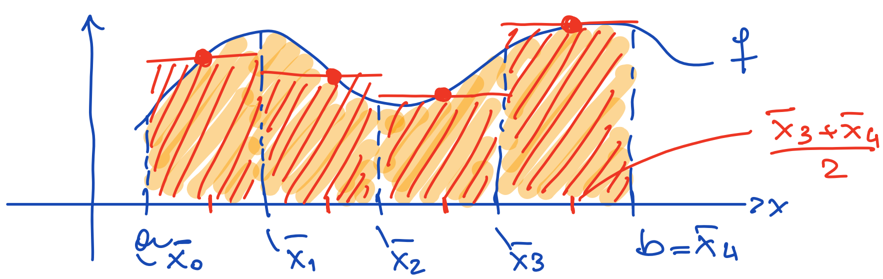
dove $\tilde{I}_{PM} = f(x_0)\cdot(b-a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

da cui $$\boxed{\left|I - \tilde{I}_{PM}\right| \le \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_\infty}$$

se $(b-a)$ è grande, l'errore può essere molto grande

Formula composita del punto medio

Suddivido $[a,b]$ in M intervallini



$I_1 = [\bar{x}_0, \bar{x}_1] \qquad I_k = [\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k]$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \int_{I_k} f(x)\,dx \qquad \text{(additività dell' } \textstyle\int \text{)}$$

$$\approx \underbrace{\sum_{k=1}^{M} f\left(\frac{\bar{x}_{k-1}+\bar{x}_k}{2}\right)\cdot(\bar{x}_k-\bar{x}_{k-1}) = \tilde{I}^{c}_{PM}}_{\text{fdq del punto medio composito}}$$

Teorema: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^2

Sia $H = \max_k (\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1})$ (max ampiezza intervallini)

Allora

$$\underbrace{|I - \tilde{I}^{c}_{PM}|}_{\text{errore di quadratura}} \leq \frac{(b-a)}{24} \cdot H^2 \, \|f''\|_\infty .$$

Se prendo sempre + intervalli, con $H \to 0$

$\Rightarrow$ l'errore di quadratura $\to 0$ come H^2.

(1) PM composito è accurato di ordine 2 rispetto ad H

(2) Se $f'' \equiv 0 \Rightarrow |I - \tilde{I}^{c}_{PM}| = 0$

e semplice

PM composito integra esattamente tutte le rette, cioè l'errore è nullo.

Def 1:

Ordine di accuratezza di una fdq composita è l'ordine con cui l'errore tende a zero quando H tende a zero.

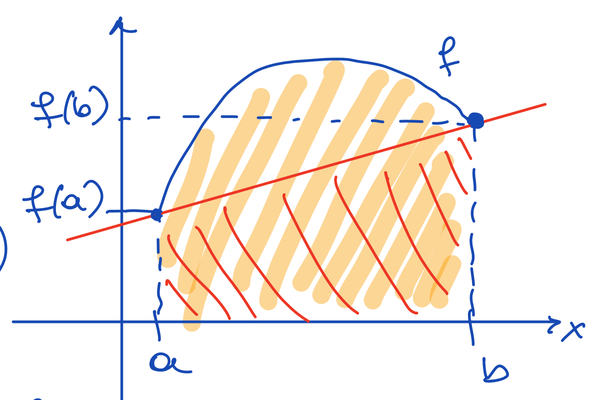
$$|I - \tilde{I}| \leq C \cdot H^{q}$$ = ordine di accuratezza

Def 2: Grado di precisione di una fdq è il grado max polinomiale per cui tutti i polinomi di tale grado sono integrati esattamente dalla formula.

es: grado di precisione = 1 ≡ integro esattamente tutti i pol. di grado 1, ma non tutti i pol di grado > 1

PM composito ha ordine di acc 2
PM (comp e semp) ha grado di precisione 1

Formula dei trapezi



$I(f)$

$$\tilde{I}_T = \frac{(f(a)+f(b))}{2} \cdot (b-a)$$

$$\tilde{I}_T = f(a)\,\frac{b-a}{2} + f(b)\cdot\frac{b-a}{2}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i$$

$n = 1$

$x_0 = a \qquad x_1 = b$

$w_0 = \frac{b-a}{2} \qquad w_1 = \frac{b-a}{2}$

È una fdq chiusa

Teorema (Trap): Se $f \in C^2([a,b])$

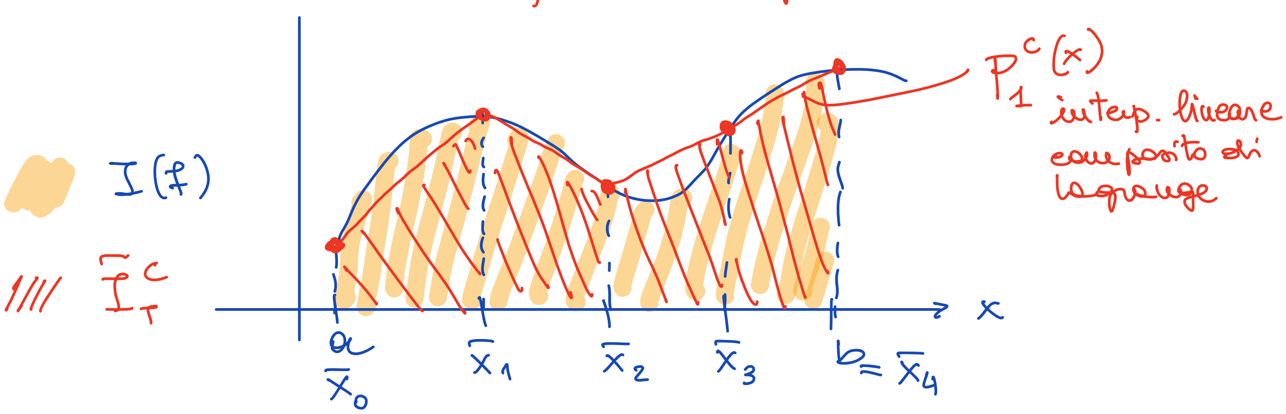
allora $\exists\, \xi \in (a,b)$:

$$I - \tilde{I}_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

e $$|I - \tilde{I}_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty \quad -$$

$$\left(|I - \tilde{I}_{PM}| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_\infty \right)$$

Formula dei trapezi composita



$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \int_{I_k} f(x)\,dx \qquad I_k = [\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k]$$

M = n° intervallini

$$\simeq \underbrace{\sum_{k=1}^{M} \frac{\left(f(\bar{x}_{k-1}) + f(\bar{x}_k)\right)}{2} \cdot (\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1})}_{\text{fdq trapezi composita}} = \tilde{I}_T^c$$

Teorema (trap. comp): Se $f \in C^2([a,b])$

allora $$|I - \tilde{I}_T^c| \le \frac{(b-a)}{12} H^2 \|f''\|_\infty .$$

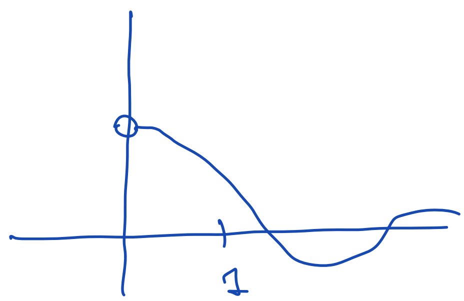
$\Rightarrow$ ordine di acc $= 2$

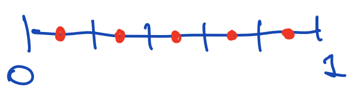
grado di precisione $= 1$

Trapezi va bene quando non conosco l'espressione di f, ma conosco solo valutazioni di f in certi punti

Punto medio va bene quando ho funzioni non definite agli estremi dell'intervallo

es: $$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$



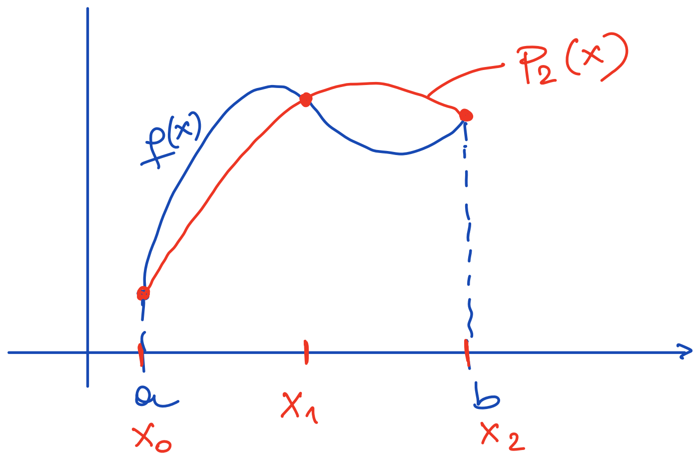


Formula di Simpson

Si interpola f con il pol interp di Lagrange di grado 2 nei nodi

$$a \,,\quad \frac{a+b}{2} \,,\quad b$$

dove cerco $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$



Scrivendo $p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\varphi_i(x)$

e calcolando $w_i = \int_a^b \varphi_i(x)\,dx$ si

ottiene
$$\tilde{I}_S = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

cioè $x_0 = a$ $\quad x_1 = \frac{a+b}{2}$ $\quad x_2 = b$

$$w_0 = \frac{b-a}{6} \qquad w_1 = \frac{2}{3}(b-a) \qquad w_2 = \frac{b-a}{6}$$

$$\tilde{I}_S = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\,w_i$$

Teorema (Simpson)

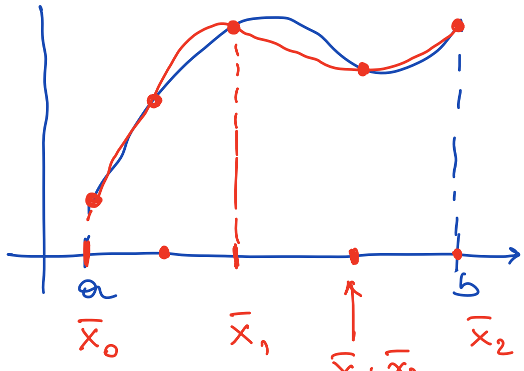
Se $f \in C^4([a,b])$ allora $\exists\, \xi \in (a,b)$:

$$I - \tilde{I}_S = -\frac{(b-a)^5}{18 \cdot 160} f^{IV}(\xi)$$

$$|I - \tilde{I}_S| \le \frac{(b-a)^5}{18 \cdot 160} \|f^{IV}\|_\infty .$$

Formula di Simpson composita

Si divide $[a,b]$ in M intervallini



$$I(f)=\sum_{k=1}^{M}\int_{I_k} f(x)\,dx \sim \underbrace{\sum_{k=1}^{M}\frac{(\bar{x}_k-\bar{x}_{k-1})}{6}\left[f(\bar{x}_{k-1})+4f\left(\frac{\bar{x}_{k-1}+\bar{x}_k}{2}\right)+f(\bar{x}_k)\right]}_{\substack{\parallel \\ \tilde{I}_S^c}}$$

Simpson è una formula chiusa

Teorema (Simpson composita) Se $f\in C^4([a,b])$

allora $\left|I-\tilde{I}_S^c\right|\leq \frac{(b-a)}{18\cdot 160}H^4\,\|f^{IV}\|_\infty$.

$\Rightarrow$ Simpson ha ordine di acc 4

grado di precisione 3

Se alzo il grado n di interpolaz

e i nodi x_i sono equisp, non è

detto che $|I - \tilde{I}| \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$

(per i problemi dell' interp su nodi equisp)

$\Rightarrow$ non si usano fdq di Newton di grado alto.

Fdq interpolatorie di tipo gaussiano

(i nodi non sono equisp)

Se scegliessi i nodi di Chebishev visti nell' interpolazione avrei che

$$\tilde{I} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i \sim \int_a^b f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

e non $\int_a^b f(x)\, dx$.

L' alternativa è usare nodi di

Gauss-Legendre : $x_i \in (a, b)$, $i = 0, \dots, n$

e sono gli zeri del polinomio di grado $n+1$ di Legendre :

Pol di Legendre :

$$\begin{cases} L_0(x) \equiv 1 \\ L_1(x) = x \\ L_{n+1}(x) = \dfrac{2n+1}{n+1}\, x\, L_n(x) - \dfrac{n}{n+1} L_{n-1}(x) \\ \quad \text{con } n \geq 1 \end{cases}$$

fissato n, costruisco x_i come zeri di $L_{n+1}(x)$

e $w_i = \int_a^b \varphi_i(x)\,dx$ (funz di base di Lagrange definite sui nodi x_i)

$$\tilde{I}_{GL} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i$$

Teorema: Se $f \in C^{(2n+2)}([-1,1]) \Rightarrow$

$$|I - \tilde{I}_{GL}| \leq \underbrace{\frac{2^{2n+3}\left((n+1)!\right)^4}{(2n+3)\left((2n+2)!\right)^3}}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} \|f^{(2n+2)}\|_\infty$$

grado di precisione $= 2n+1$

se uso $(n+1)$ nodi di quadratura