Equazioni di punto fisso

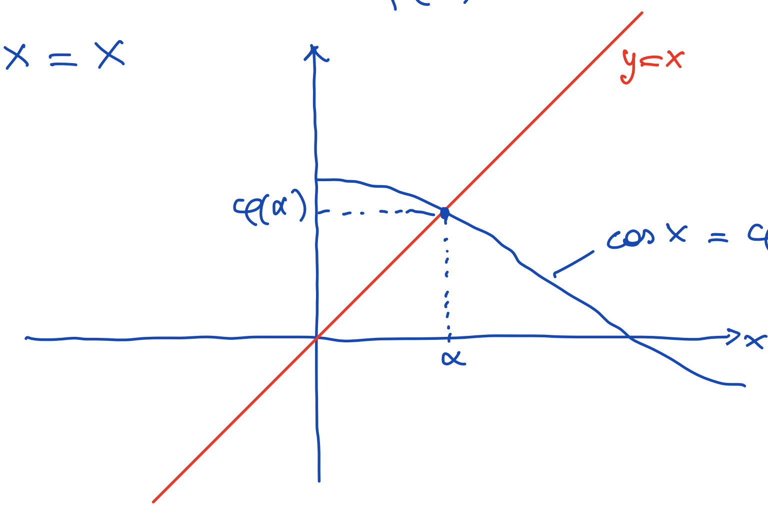
Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $\varphi : dom(\varphi) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

e si vuole risolvere $\varphi(x) = x$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\varphi(x) - x}_{f(x)} = 0$$

es ? x : $\cos x = x$



Def <u>punto fisso di φ</u> il valore α : $\varphi(\alpha) = \alpha$

Si costruisce una succ $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ con

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \quad \text{per } k \geq 0 \end{cases}$$

Metodo di pto fisso

es $\quad x^{(0)} = 1 \qquad \varphi(x) = \cos x$

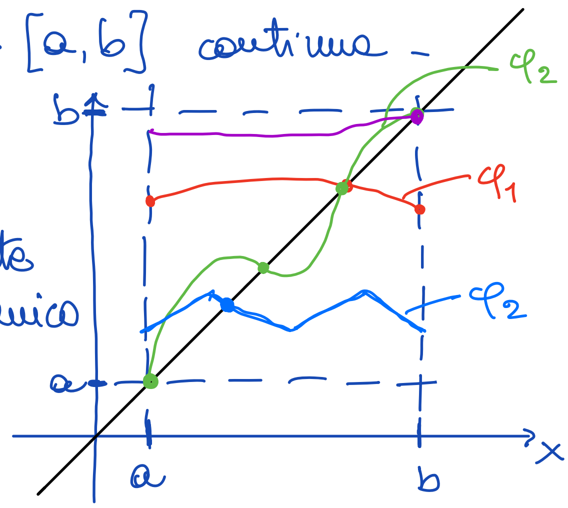
$x^{(1)} = \cos(x^{(0)})$

$x^{(2)} = \cos(x^{(1)})$ .....

? sotto quali ipotesi la succ $x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha$

$$\underbrace{x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha}_{\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha}$$

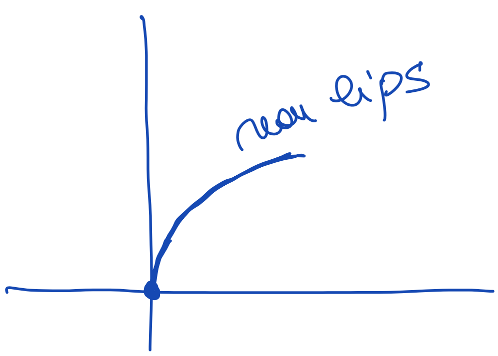
Teorema: Sia $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ continua.

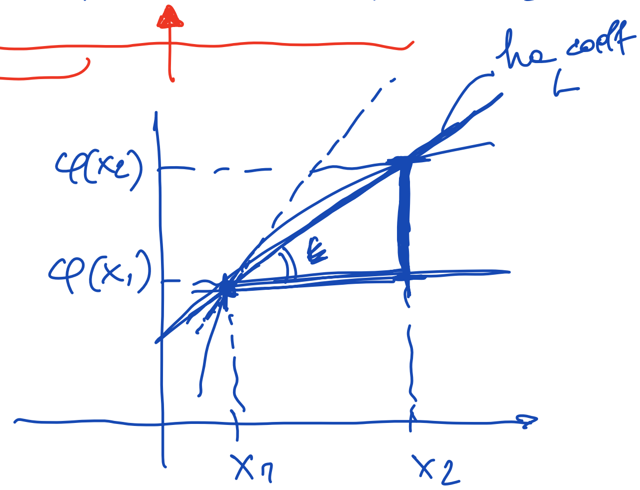


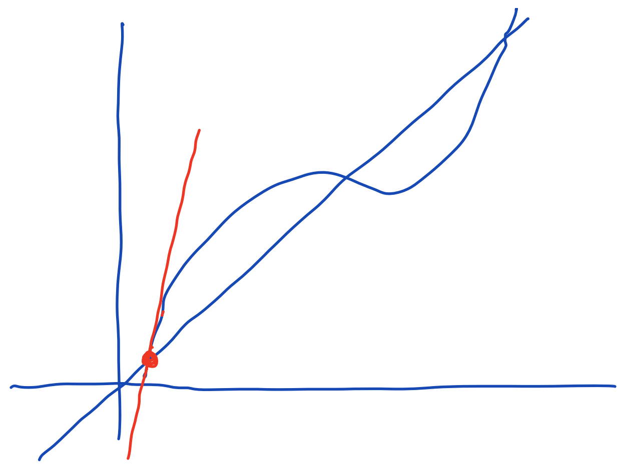
1. $\exists$ almeno un pto fisso di φ.

2. Se φ è lipschitziana* di costante $0 < L < 1$ $\Rightarrow$ il punto fisso è unico e la succ $x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha$, $\forall x^{(0)} \in [a,b]$.

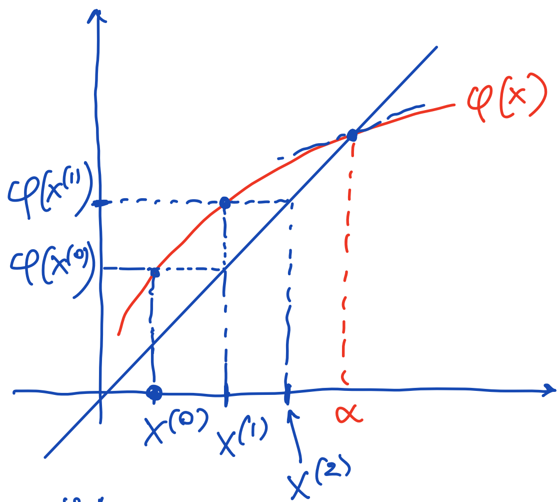
(*) φ è lipsch. nell'intervallo $[a,b]$ con costante L se $\exists L > 0$: $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$







(1)

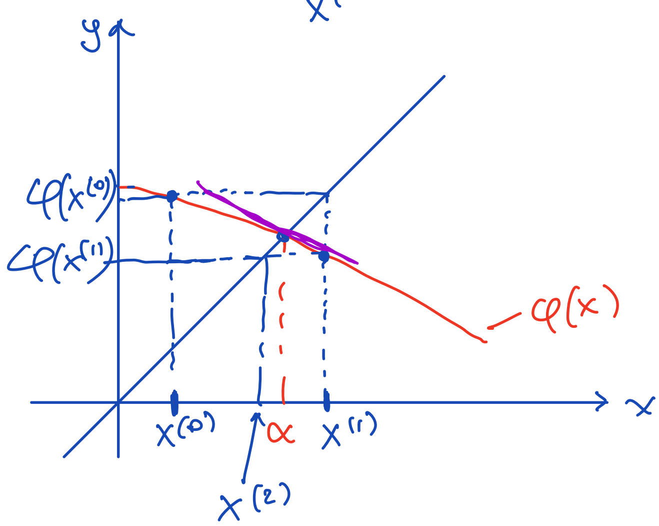


$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$$

$$x^{(k)} \to \alpha$$

$$\boxed{|\varphi'(\alpha)| < 1}$$

(2)



$$x^{(k)} \to \alpha$$

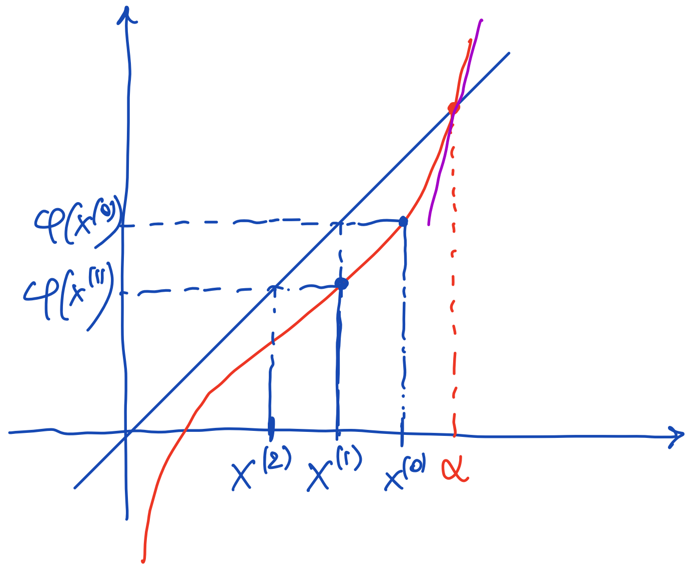
$$-1 < \varphi'(\alpha) < 0$$

$$\Downarrow$$

$$|\varphi'(\alpha)| < 1$$

Se φ è deriv $\quad L = \max |\varphi'(x)|$

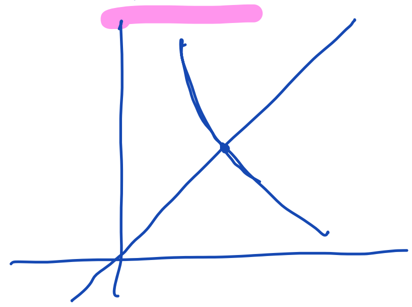
3



$x^{(k)} \not\xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha$

$\boxed{\varphi'(\alpha) > 1}$

Risultato analogo se $\varphi'(\alpha) < -1$



Teorema di OSTROWSKI

Sia $\varphi \in C^1(I)$ e sia $\alpha \in I$ pto fisso per φ.

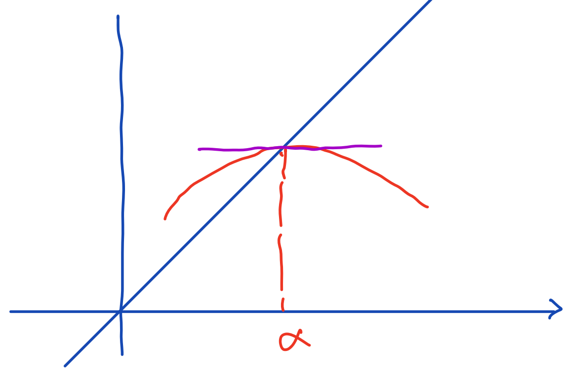
Se $|\varphi'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall x^{(0)} \in I_\delta(\alpha)$:

$x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha$ (ho convergenza a patto di prendere $x^{(0)}$ abbastanza vicino ad α)

Inoltre, se $\varphi'(\alpha) \neq 0$, allora il metodo di pto fisso converge con ordine 1.

cioè $|x^{(k+1)} - \alpha| \leq C\,|x^{(k)} - \alpha|$ con $0 < C < 1$

Teorema : Se $\varphi'(\alpha)=0$ allora il metodo di punto fisso converge con ordine almeno 2 a patto che $x^{(0)}$ sia suff. vicino ad α.



$$|x^{(k+1)}-\alpha| \le C\,|x^{(k)}-\alpha|^2$$

Newton :
$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = \underbrace{x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}_{\varphi(x^{(k)})} \end{cases}$$

Newton è un particolare metodo di punto fisso la cui funzione $\varphi(x)$ è

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \left(\varphi'(x) : \; \varphi'(\alpha)=0 \right)$$

Secanti
$$\begin{cases} x^{(0)}, x^{(1)} \text{ dati} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{\dfrac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}} \end{cases}$$

non è un metodo di punto fisso

Algoritmo per un metodo di punto fisso

Input: phi, x0, tol, kmax

Output: alpha, k

$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$

```
k = 0
err = tol + 1
while (k ≤ kmax & err > tol)
    xnew = phi(x0)
    err = abs(xnew - x0)
    k = k + 1
    x0 = xnew
end
alpha = xnew
```

test d'arresto sull'incremento