SISTEMI LINEARI

17/10/2023

Metodi diretti

Dati: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matrice), $\underline{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (t. noto)

? : $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (vett. soluz) : $A\underline{x} = \underline{b}$

Ipotesi su A: $\det(A) \neq 0$
quindi $\exists !$ soluz $\underline{x}$ di $A\underline{x} = \underline{b}$

A è una matrice diagonale
cioè $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \emptyset \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ \emptyset & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

un sist con A diagonale:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 = b_1 \\ a_{22} x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \emptyset \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ \emptyset & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

sono tutte eqz indipendenti

la sol: $\begin{cases} x_1 = b_1 / a_{11} \\ \vdots \\ x_n = b_n / a_{nn} \end{cases}$

costo: n operazioni elementari

se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow a_{ii} \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$

A triangolare inferiore : $a_{ij}=0$ quando $j>i$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \emptyset \\ \bullet & a_{22} & & \\ a_{ij} & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ \boxed{a_{21}x_1} + a_{22}x_2 = b_2 \\ \boxed{a_{31}x_1 + a_{32}x_2} + a_{33}x_3 = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$x_1 = b_1 / a_{11}$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)}{a_{33}}$$

$\vdots$

for $i = 1 : n$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

Algoritmo delle sostituzioni in avanti

OSS se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow a_{ii} \neq 0$ per $i = 1:n$

Se A è triangolare $\Rightarrow \lambda_i(A) = a_{ii}$

autovalori di A

Costo computazionale

for $i = 1:n$

$$x_i = \Big(b_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}\Big) / a_{ii}$$

1 1

$$\underbrace{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1}}_{(i-1)\text{ addendi}}$$

$(i-1)$ prodotti $+$ $(i-2)$ somme

$\forall i$ ho $\quad 1+1+(i-1)+(i-2) = 2i-1$ oper. elem.

costo totale è $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ oper. elem

$$2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = \cancel{2}\cdot\frac{(n+1)\,n}{\cancel{2}} - n = n^2+n-n = n^2$$

l'alg delle sost in avanti costa n^2 op. elem.

A triangolare superiore

$a_{ij}=0$ per $i>j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{ij} \\ \emptyset & a_{22} & \\ & \ddots & \\ \emptyset & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \boxed{\cdots + a_{2n}x_n} = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad a_{n-1,n-1}x_{n-1} + \boxed{a_{n-1,n}x_n} = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_n = b_n / a_{nn}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}\, x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{b_i - \left(a_{i,i+1}\, x_{i+1} + \cdots + a_{i,n}\, x_n\right)}{a_{ii}}$$

passo

$$\left[\begin{array}{l} \text{for } i = n : -1 : 1 \\ \quad x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \end{array}\right.$$

Algoritmo delle sostituzioni all'indietro

costo computazionale $= n^2$ op. elem.

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow a_{ii} \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$

A generica quadrata non singolare

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots \quad a_{ij} & \\ a_{ij} \quad & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

Metodo di Eliminazione di Gauss (MEG)

$$\underset{\text{A generica}}{A\underline{x} = b} \rightarrow \underset{\text{riduzione}}{\cdots} \rightarrow \tilde{A}\underline{x} = \tilde{b}$$

equivalente al sistema di partenza

con $\tilde{A}$ triang. superiore

MEG : riduzione + sostituzioni all'indietro

riduzione

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

passo $\underline{k = 1}$ azzerare a_{21} e a_{31}

Sostituendo un'eqz del sistema con una comb. lineare dell'eqz stessa e di un'altra eq del sistema si ottiene un sistema equivalente a quello dato (non si altera la soluz del sistema)

sostituisco riga 2 con $\underbrace{\text{riga 2} - \text{riga 1}}$

? m_{21} : $a_{21} - m_{21} a_{11} = 0$ $\qquad m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{2}{2} = 1$

moltiplicatore

$$R_2 \leftarrow R_2 - m_{21} R_1$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ A^{(1)}}}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b^{(1)} = \underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$m_{21} = 1$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & \boxed{-2} & -5 \end{bmatrix} \qquad \underline{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

lavoro similmente nella riga 3

? m_{31} : $a_{31} - m_{31} a_{11} = 0 \rightarrow m_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}} = \dfrac{4}{2} = 2$

$R_3 \leftarrow R_3 - m_{31} R_1$

$\boxed{\text{passo } k=2}$ azzerare gli elem a_{i2} sotto la diag principale
di fatto qui a_{32}

? m_{32} : $a_{32} - m_{32} a_{22} = 0 \rightarrow m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = -2$

$R_3 \leftarrow R_3 - m_{32} R_2 = R_3 + 2 R_2$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \qquad b^{(3)} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$\tilde{A}$ $\qquad$ $\tilde{b}$

risolvendo $\tilde{A} x = \tilde{b}$ ottengo x sol del sistema originario
(con sost all'indietro)

Algoritmo MEG

for $k = 1 : n-1$ (indice del passo e indica la colonna da azzerare sotto diag princ)

for $i = k+1 : n$ ← indice di riga su cui lavoro

$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ ← moltiplicatore

for $j = 1 : n$ ← scorro le colonne per realizzare la comb. lin.

$j = k+1 : n$

$$a_{ij} = a_{ij} - m_{ik}\, a_{kj}$$

$$b_i = b_i - m_{ik}\, b_k$$

comb. lin vera e propria delle righe i e k

costo computazionale della fase di riduzione del MEG è

$$\frac{2}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 - \frac{7}{6} n \quad \text{op. elem.}$$

costo della fase di sost è n^2

totale (riduzione + sostituzione) : $\boxed{\frac{2}{3} n^3 + \frac{3}{2} n^2 - \frac{7}{6} n}$

Esempio particolare che porta a $a_{kk} = 0$ durante la riduzione

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad \underline{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 1 \quad \Rightarrow R_2 \leftarrow R_2 - R_1$$

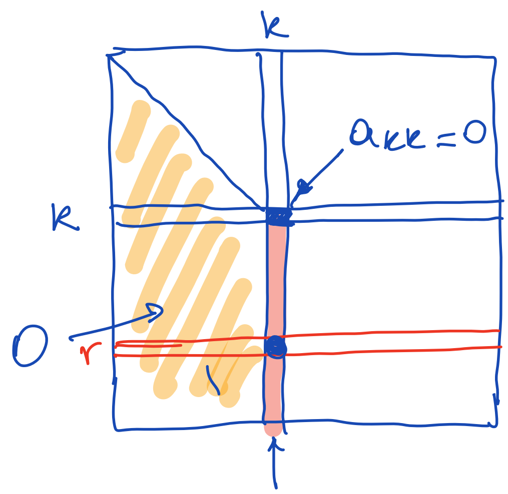
$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 1/2 \quad \Rightarrow R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2} R_1$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ & & \end{bmatrix} \qquad \underline{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{2}{0}$$

la soluzione è scambiare l'eqz k-sima con $a_{kk} = 0$ con un'altra eq del sist.

si ha la <u>PIVOTAZIONE per RIGHE</u>



? $r \geq k$:

$$|a_{rk}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}|$$

poi scambio le righe r e k sia su A che su $\underline{b}$

$\Downarrow$

alla fine in a_{kk} ho il valore con modulo massimo della colonna (da k in giù)

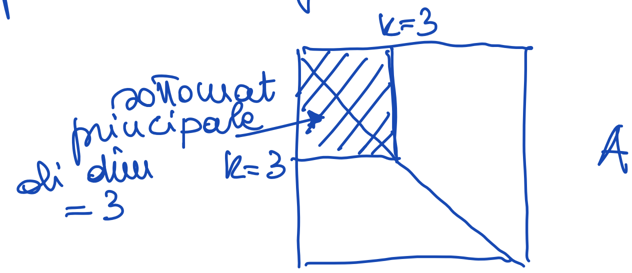
$$\boxed{m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}}$$

$$\Downarrow$$
$$|m_{ik}| \leq 1$$

in genere la piv per righe è svolta anche quando $a_{kk} \neq 0$ per limitare la propagazione degli err di arrot.

Teorema 1 Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è non singolare allora non è garantito che MEG arrivi a terminazione senza generare un overflow (= una divis. per zero)

Def: sottomatrice principale di dim. k di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, una matrice costruita prendendo le prime k righe e k colonne di A



Def minore principale è il determinante di una sottomatrice principale

Teorema 2: Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è non sing e tutti i minori principali sono $\neq 0$, allora MEG arriva a terminazione senza divisioni per 0.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

sottomat principale singolare

Devo risolvere

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \quad e \quad \underline{A}\,\underline{z} = \underline{c}$$

se io applico MEG :

1° sist $\quad \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$

2° sist $\quad \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$

Tot $\quad \frac{4}{3}n^3 + \dots$

ora voglio separare il lavoro su A da quello su $\underline{b}$.

Metodo di fattorizzazione LU

Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cerco $L, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$

con L tr. inferiore e U tr. superiore

t.c. $\quad L \cdot U = A$.

Se sono in grado di calcolare L, U allora risolvo il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ come

$$L \cdot \underbrace{U\underline{x}}_{} = \underline{b}$$

$\underline{y}$

introduco la var ausiliaria $\boxed{\underline{y} = Ux}$

prima risolvo $L\underline{y} = \underline{b}$ (sist tr. inf.)

poi risolvo $U\underline{x} = \underline{y}$ (sist tr. sup).

Si dimostra che posso scegliere

$U =$ mat tr. sup che si ottiene col MEG

e
$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ m_{ij} & \text{se } i>j \quad (\text{tr. inf}) \\ 0 & \text{se } i<j \quad (\text{tr. sup}) \end{cases}$$

24/10/23

Come calcolare L e U

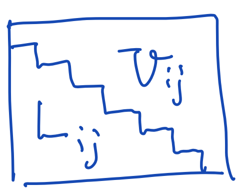
MEG

for $k = 1 : n-1$
  for $i = k+1 : n$
    $m_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$
    for $j = k+1 : n$
      $a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$
    $b_i = b_i - m_{ik} b_k$

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

LU

for $k = 1 : n-1$
  for $i = k+1 : n$
    $a_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$
    for $j = k+1 : n$
      $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$

A 

notazione impropria

$$\begin{bmatrix} 0 & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

risolvo $U\underline{x} = \underline{b}$ con sost all'indietro

$\frac{2}{3}n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{7}{6}n$ riduzione

n^2 sostituz.

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

se devo risolvere un solo sistema MEG e LU sono equivalenti

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & \ddots & a_{ij} \\ 0 & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \ddots & 0 \\ a_{ij} & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

risolvo $L\underline{y} = \underline{b}$

risolvo $U\underline{x} = \underline{y}$

$\frac{2}{3}n^3 - \frac{n^2}{2} - \frac{7}{6}n$ (L, U)

$+2n^2$ (i due sist tr.)

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

Se devo risolvere 2 sistemi

$A\underline{x} = \underline{b}$ e $A\underline{z} = \underline{c}$

col MEG: $2\left(\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n\right) = \frac{4}{3}n^3 + \cdots$

con LU: $\frac{2}{3}n^3 - \frac{n^2}{2} - \frac{7}{6}n$ (1 sola fatt LU)

$+2n^2$ per risolvere i sist tri. associati a $\underline{b}$

$+2n^2$ per risolver i sist triang associati a $\underline{c}$

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{7}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

LU è + conveniente

LU con pivotazione per righe

P = Identità

ogni volta che scambio 2 righe di A nella fatt, effettuo lo stesso scambio anche nelle righe di P

matrice di pivotazione

Output : L, U, P

con $L \cdot U = P \cdot A$

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff \underbrace{P \cdot A}_{L \cdot U}\underline{x} = P \cdot \underline{b} \iff L\underbrace{U\underline{x}}_{\underline{y}} = P\underline{b}$$

devo risolvere : $\begin{cases} L\underline{y} = \underline{P} \cdot \underline{b} \\ U\underline{x} = \underline{y} \end{cases}$

Calcolo di det(A) con LU

È noto che se $A = B \cdot C \Rightarrow \det(A) = \det(B) \cdot \det(C)$

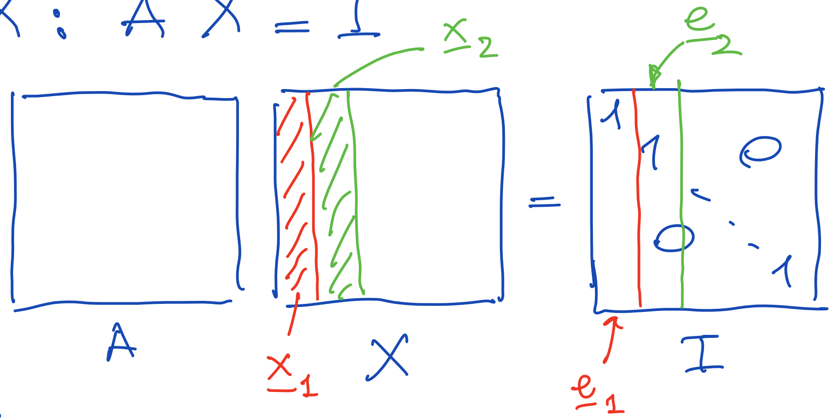
se $A = L \cdot U \Rightarrow \det(A) = \underbrace{\det(L)}_{1 = l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn}} \cdot \underbrace{\det(U)}_{u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn}}$

$= u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn}$

Calcolo di A^{-1}

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile, cioè $\exists\, A^{-1} : A \cdot \underbrace{A^{-1}}_{X \text{ incognita}} = I \ (= A^{-1} \cdot A)$

$? \ X : AX = I$



$$\begin{cases} A\,\underline{x}_1 = \underline{e}_1 \\ A\,\underline{x}_2 = \underline{e}_2 \\ \vdots \\ A\,\underline{x}_n = \underline{e}_n \end{cases}$$

se risolvo questi sistemi ottengo $X = A^{-1}$

1 solo fatt LU di A $\qquad \frac{2}{3}n^3 - \frac{n^2}{2} - \frac{7}{6}n$

for $i = 1 : n$

  risolvo $\begin{cases} L\,\underline{y} = \underline{e}_i \\ U\,\underline{x}_i = \underline{y} \end{cases}$ $\qquad 2n^2 \cdot n$

costo totale per calcolare A^{-1}: $\quad \frac{8}{3}n^3 - \frac{n^2}{2} - \frac{7}{6}n$

$$? \quad \underbrace{\underline{x} = A^{-1}\underline{b}}_{\frac{8}{3}n^3+\dots} \quad \Longleftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\frac{2}{3}n^3+\dots$$

Matrici simmetriche e def. positive

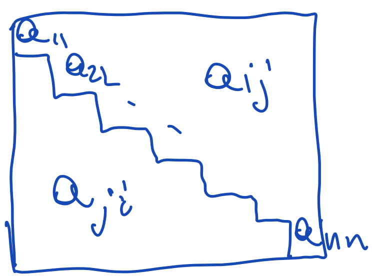
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è sim. def. pos (s.d.p) se

1) $A = A^T$

2) $\underline{x}^T A \underline{x} > 0 \quad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ \underline{x} \neq \underline{0}$

Se $A = A^T \Rightarrow \lambda_i(A) \in \mathbb{R}$

Se A è sdp $\Rightarrow \lambda_i(A) \in \mathbb{R}^+$



$a_{ji} = a_{ij}$ posso risparmiare in memoria

Fattorizzazione di Choleski

Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sdp, calcola $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tr. sup. t.c.

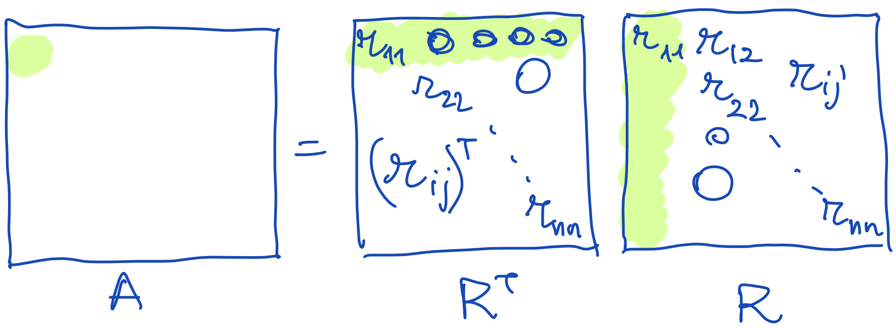
$$A = \underset{\text{inf}}{R^T} \cdot \underset{\text{sup}}{R}$$

costo $\sim \frac{n^3}{3}$ op elem

trovata R
risolvo

$$R^T \cdot \underbrace{R\,\underline{x}}_{\underline{y}} = \underline{b} \iff \begin{cases} R^T \underline{y} = \underline{b} \\ R\,\underline{x} = \underline{y} \end{cases}$$

costo totale finale è $\frac{n^3}{3} + \dots$



$$a_{11} = r_{11} \cdot r_{11} \Rightarrow r_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

1ª riga di R^T · 2ª col di R

$$a_{12} = r_{11} \cdot r_{12} \rightarrow r_{12} = a_{12} / r_{11}$$

$\vdots$

se A è sdp non serve fare pivotazione e Choleski arriva a terminazione.