I punti x_i dell'interpolazione sono detti **nodi di interpolazione**.

Per la def di interpolazione vedere il file Approssimazione.pdf. (lezione del 7/11/2023)

14/11/2023

Teorema dell'errore di interpolazione

Sia $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ di classe $C^{n+1}([x_0, x_n])$

(f e tutte le derivate fino a ordine n+1 sono continue nell'intervallo)

Siano $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i nodi di interpolazione (distinti).

$\forall\, x \in [x_0, x_n] \ \exists\, \xi_x \in [x_0, x_n]$:

$$(f - P_n)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)}_{= w(x)}$$

$$\underbrace{\max_{x \in [x_0, x_n]} |(f-P_n)(x)|}_{\|f - P_n\|_\infty} \le \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}\, \|w\|_\infty$$

Se i nodi x_i sono equisp, non è garantito

che $\|f - P_n\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$

es: $f(x) = \frac{(x+2)}{7} \cos(x)$, i nodi equisp non daranno problemi

es: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ su $[-5, 5]$ i nodi equisp. daranno probl

$$\|f - P_n\|_\infty \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$$

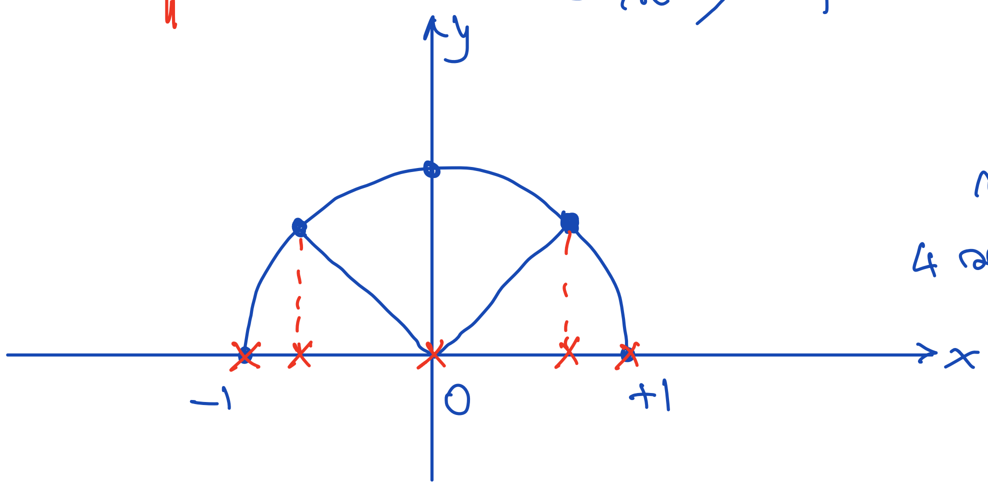
NODI DI CHEBYSHEV

sono una famiglia di nodi di interp. per cui è dimostrato che

$$\|f - P_n\|_\infty \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty$$

prendo l'intervallo $[-1, 1]$ e def:

$$\hat{x}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{m}\right) \quad \text{per } i = 0, \dots, m$$



$m = 4$

4 settori, 5 punti

Su un intervallo generico $[a, b]$ rimappo i punti $\hat{x}_i$:

$$x_i = \frac{(b-a)}{2} \hat{x}_i + \frac{b+a}{2} \qquad \text{per } i = 0, \dots, n$$

si dimostra che con questi nodi

$$\underbrace{\|f - p_n\|_\infty}_{\text{errore di interpolazione}} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

Nodi di LEGENDRE sono alternativi ai nodi di Chebishev, ma non sono noti esplicitamente, bisogna calcolarli come radici di polinomi opportuni

---

Questione computazionale

Quando n è alto (es $n > 20$) il n° di condiz della matrice di VanderMonde cresce molto $\Rightarrow$

risolvere $X \underline{a} = \underline{y}$

diventa problematico.

Cerco un approccio alternativo alla matrice di VanderMonde

Alternativa:
base dei polinomi di LAGRANGE

Voglio sostituire la base dei monomi con una base diversa:

$$\mathcal{B}_{lagrange} = \left\{ \varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad \text{con } i=0,\dots,n \right\}$$

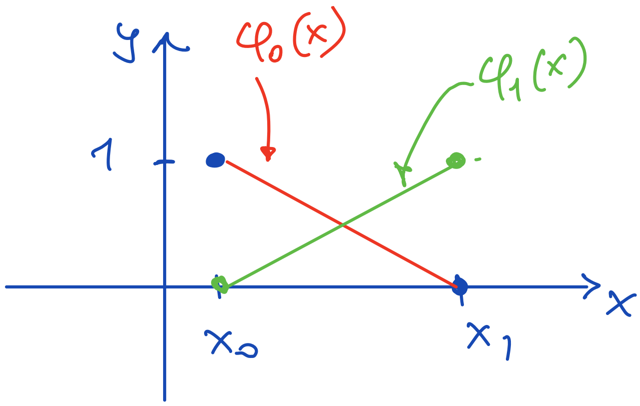
BASE di LAGRANGE

$$\left(\mathcal{B}_{monomi} = \{x^n, x^{n-1}, \dots\dots, x, 1\} \right)$$

caso $n=1$

$$\varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad \text{con } i=0,1$$

ho 2 funzioni



$$\varphi_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$$

$$\varphi_0(x_0) = 1$$

$$\varphi_0(x_1) = 0$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \qquad \varphi_1(x_0) = 0 \qquad \varphi_1(x_1) = 1$$

caso $n=2$

$$\varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

3 funzioni

$$\varphi_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{2} \frac{(x-x_j)}{x_0-x_j} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

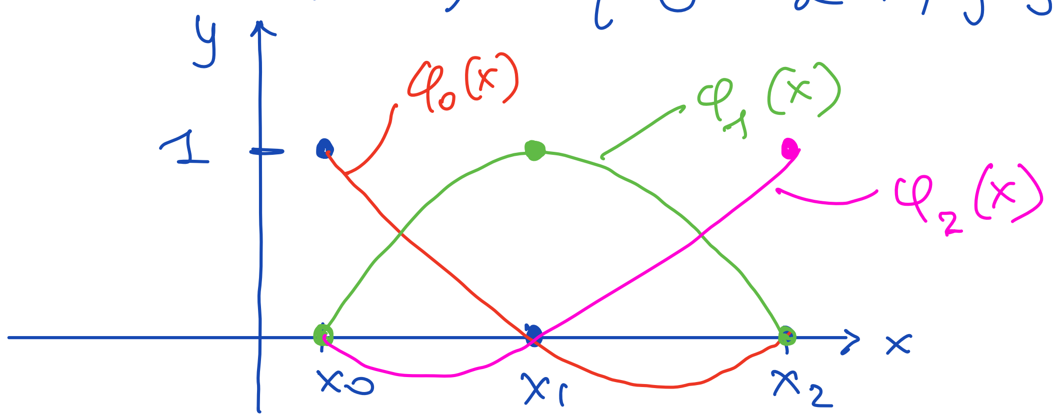
$\varphi_0(x_0)=1$ $\quad$ $\varphi_0(x_1)=0$ $\quad$ $\varphi_0(x_2)=0$

$\varphi_1(x_0)=0$ $\quad$ $\varphi_1(x_1)=1$ $\quad$ $\varphi_1(x_2)=0$

$\varphi_2(x_0)=0$ $\quad$ $\varphi_2(x_1)=0$ $\quad$ $\varphi_2(x_2)=1$

$\Downarrow$

$$\varphi_i(x_j) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{array}\right\} = \delta_{ij}$$



$\mathcal{B}_{Lagr}$ è una base per $\mathbb{P}_n$

costruita a partire da $n+1$ nodi distinti

Se $p_n \in \mathbb{P}_n \Rightarrow$ posso scrivere

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{p_n(x_i)\,\varphi_i(x)}$$

Se ho f continua nell'intervallo $[x_0, x_n]$ e considero i nodi di interp $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distinti

posso costruire $p_n(x)$ che interpola f nei nodi x_i (cioè $p_n(x_i) = f(x_i)$ con $i = 0, \ldots, n$)

con la formula

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\varphi_i(x)}$$

dati $x_i,\ y_i = f(x_i)$

$\hookrightarrow$ posso calcolare $\varphi_i(x) \quad \forall x \in [x_0, x_n]$

ho l'espressione di $p_n(x)$ in un qualsiasi $x \in [x_0, x_n]$ senza bisogno di risolvere il sistema lineare con matrice di VM.

Devo valutare in maniera efficiente $\varphi_i(x)$ - Si usa la formula "baricentrica" (è una formula efficiente e accurata) -

$y1 = \text{barycentric}(x, y, x1)$

contengono i dati dell'interp. (x_i, y_i) per $i = 0, \dots, n$

$x1$ è un vettore di ascisse in cui voglio valutare $p_n(x)$

$y1$ = vett che contiene le valutazioni di p_n nei punti memorizzati in $x1$.

Quello che abbiamo visto finora è l'interpolazione globale di Lagrange

(un solo pol. che interpola in tutti i punti dati)

INTERPOLAZIONE COMPOSITA DI LAGRANGE

Dati (x_i, y_i) con $i=0,\dots,n$

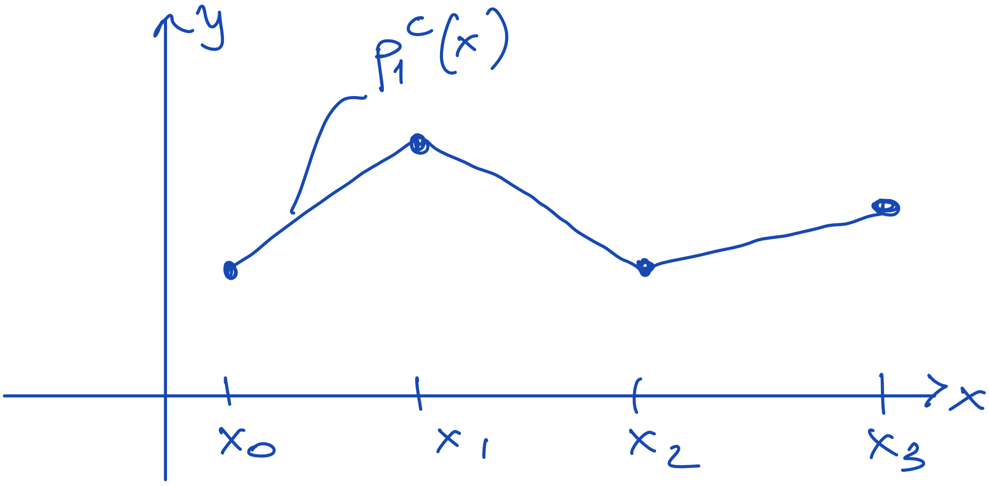
Cerco una funzione $\tilde{f} \in C^0([x_0, x_n])$

globalmente continua, polinomiale a tratti

interp. composita lineare (di Lagrange)

cerco $\tilde{f} = P_1^c$:

- $P_1^c \in C^0([x_0, x_n])$ continuità globale
- $P_1^c\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1$ spezzata (localmente di grado 1)
- $P_1^c(x_i) = y_i$ per $i=0, \dots, n$ cond. di interpolazione



? $p_1^c(x)$, – si cerca l'intervallo in cui cade x

– si valuta la retta che passa per i punti estremi dell'intervallo individuato

$$y1 = \text{interp1}(x, y, x1)$$

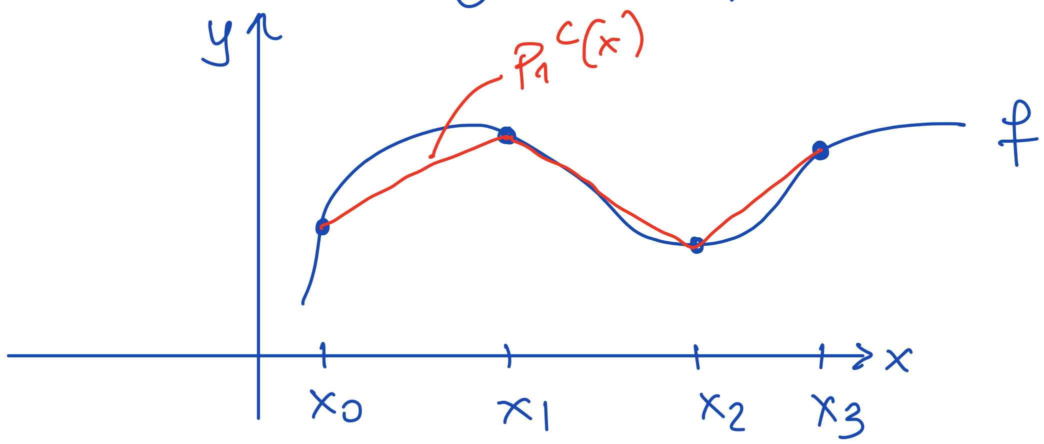
vettori dei valori $p_1^c(x1)$

dati dell'interp.

vett dei punti in cui valutare p_1^c

Proprietà di appx di $p_1^c(x)$

Supponiamo che $y_i = f(x_i)$ con $i=0, \dots, n$



Voglio misurare $\| f - p_1^c \|_\infty$

Teorema: Se $f \in C^2([x_0, x_n])$

allora $\exists C > 0$:

$$0 \leq \| f - p_1^c \|_\infty \leq C \cdot H^2 \cdot \| f'' \|_\infty$$

dove

$$H = \max_i |x_{i+1} - x_i| .$$

Quando $H \to 0$ (cioè n° di punti $\to \infty$)
allora anche l'errore $\|f - p_1^c\|_\infty \to 0$
con ordine 2 rispetto ad H
($\equiv$ quadraticamente rispetto ad H)

se H diminuisce di un ordine di grand.

$\Rightarrow$ l'errore diminuirà di 2 ordini di grandezza

$\frac{H_1}{H_2} = 10^{-1}$

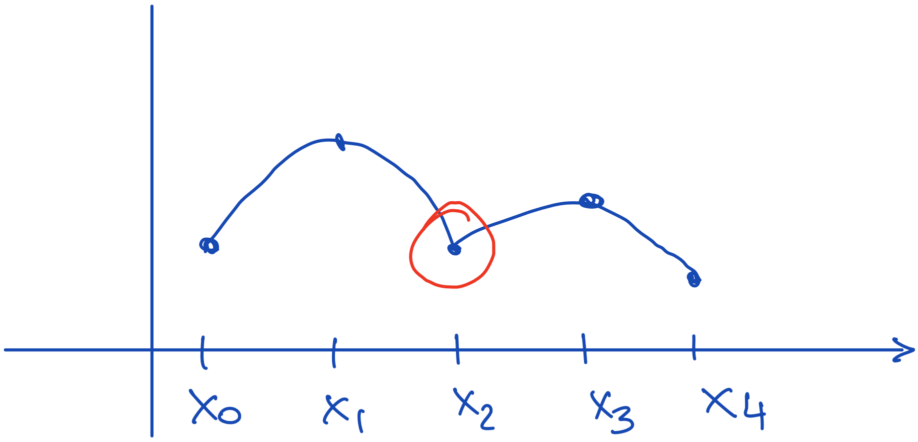
$H_1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ $\quad e_1 \sim 0.2$

$H_2 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$ $\quad e_2 \sim 0.2 \cdot 10^{-2}$

$\frac{e_1}{e_2} = 10^{-2}$

$H_3 = 10^{-3}$ $\quad e_3 \sim 0.2 \cdot 10^{-4}$

Interp composita di grado 2



$$\underbrace{\qquad\qquad}_{P_2}\underbrace{\qquad\qquad}_{P_2}$$

Dati (x_i, y_i) $i=0,\dots,n$

? $P_2^c(x)$:

- $P_2^c \in C^0([x_0, x_n])$ continuità globale
- $P_2^c\big|_{[x_i, x_{i+2}]} \in \mathbb{P}_2$ localm. grado 2

  rimanendo attenti a non lasciare buchi
- $P_2^c(x_i) = y_i$ condiz di interp.

Teorema:

Se $y_i = f(x_i)$ con $f \in C^3([x_0, x_n])$

$\Rightarrow \exists\, C>0$: $\|f - P_2^c\|_\infty \leq C \cdot H^3 \|f'''\|_\infty$

convergenza di ordine 3

se riduco H di un ordine

$\Rightarrow$ l'errore si riduce di 3 ordini

SPLINE CUBICHE

Dati (x_i, y_i) con $i = 0, \dots, n$

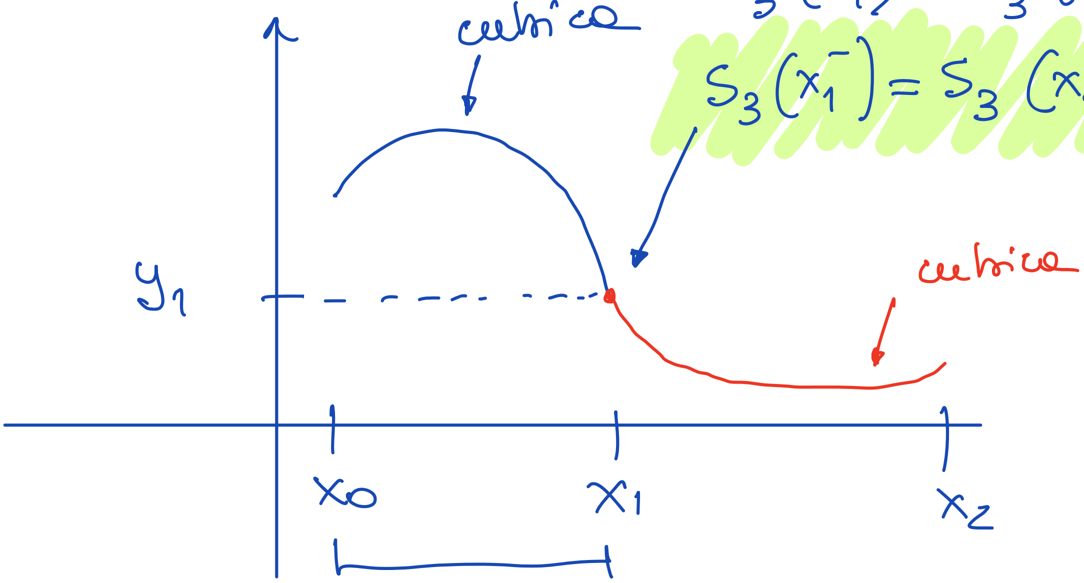
Cerco $S_3(x)$ definita su $[x_0, x_n]$:

- $S_3 \in C^2([x_0, x_n])$ globalmente di classe C^2
- $S_3\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3$ localmente di grado 3
- $S_3(x_i) = y_i$ per $i = 0, \dots, n$ condiz di interp.

$S_3''(x_1^-) = S_3''(x_1^+)$

$S_3'(x_1^-) = S_3'(x_1^+)$

$S_3(x_1^-) = S_3(x_1^+) = y_1$



le $\underbrace{\text{incognite sono}}_{1}$ $4 * n^\circ$ di intervalli $= 4n$

i coeff delle cubiche su tutti gli intervallini

ogni cubica ha 4 coeff da determinare

i vincoli sono:

condiz di interp: $(n+1)$

continuità di S_3 $n-1$

" di S_3' $n-1$

" di S_3'' $n-1$

$4n-2$

mi servono ancora 2 condizioni:

1ª: $S_3''(x_0) = S_3''(x_n) = 0$ spline naturale

2ª: $S_3'''(x_1)$ sia continua

$S_3'''(x_{n-1})$ " "

} spline not a knot (scelta di matlab)

Teorema:

Se $y_i = f(x_i)$ e $f \in C^4([x_0, x_n])$

$$\Rightarrow \|f - S_3\|_\infty \le C \cdot H^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

con $C>0$

ordine di conv 4 rispetto ad H