28/11/23

APPROSSIMAZIONE DI EQZ DIFFERENZIALI ORDINARIE

Un'eqz diff coinvolge una funzione e le sue derivate e l'incognita è la funz stessa

① eqz diff ordinarie : la funz incognita dipende da una sola variabile

② eqz diff alle derivate parziali : la funz incognita dipende da almeno 2 var

Es di e.d.o.

$$y'(t) = \lambda y(t)$$

ha as soluz

$$y(t) = Ce^{\lambda t}$$

$$y'(t) = \lambda \cdot Ce^{\lambda t}$$

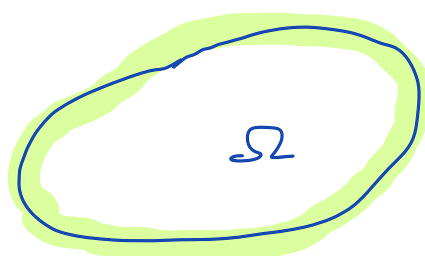
dove $C \in \mathbb{R}$

prob. di Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

l'! sol è $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$

② PDE

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$



eqz di laplace
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ derivate nelle var. spaz.

---

eqz del calore

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0,x,y) = u_0(x,y) & \forall (x,y) \in \Omega \end{cases}$$

← eq diff

← cond. al bordo

← cond iniziale in tempo

$u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$

$u(x,y,t)$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

eqz di Poisson

u = potenziale elettrico determinato da una distribuzione di carica f

$\vec{E} = -\nabla u$

↑ campo elettrico

---

per appx le derivate in spazio:

- differenze finite
- elementi finiti
- volumi finiti
- metodi spettrali

per appx derivate in tempo:

- differenze finite

– metodi multi step
– metodi di tipo Runge Kutta

Problema di Cauchy del 1° ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo $\quad I = (t_0, T)$ ist. finale, istante iniziale

? $y : I \to \mathbb{R}$ sol di

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, T) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è nota

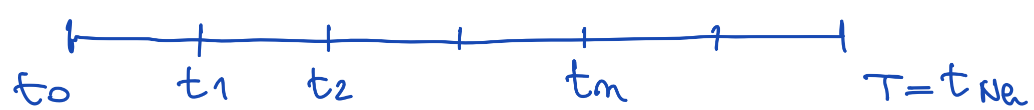
e $y_0 \in \mathbb{R}$ è noto (cond. iniziale)

Teorema: Se f è continua e limitata rispetto alla prima variabile e lipschitziana uniformemente rispetto alla seconda variabile cioè $\exists L > 0$:

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq L\,|y_2 - y_1| \qquad \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

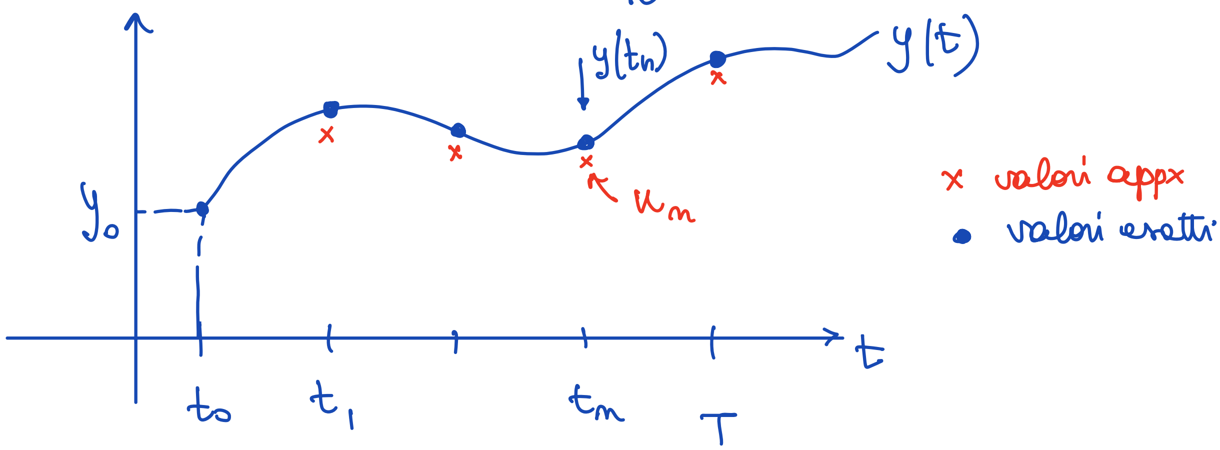
allora $\exists!$ soluzione al pbl di Cauchy e la soluz $y(t)$ è di classe C^1 nell'intervallo I.

Discretizzo l'intervallo I, definisco un passo di discretizzazione h



$t_n = t_0 + n h$ con $n = 1, \dots, N_h$ = n° tot di intervallini

$T = t_{N_h}$ $\qquad h = \dfrac{(T - t_0)}{N_h}$



t_n = istante temporale n-simo

obiettivo è appx i valori $y(t_n)$, cerco dei

valori $u_0, u_1, u_2, \dots u_n, \dots u_{N_h}$

che appx $y(t_0), y(t_1), \dots y(t_n) \dots y(t_{N_h})$

l' insieme $\{\underset{y_0}{\underset{\shortparallel}{u_0}}, u_1, \dots, u_n, \dots, u_{N_h}\}$ = soluzione numerica dell' eq. diff.

parto dall' eqz diff $\quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in (t_0, T)$

prendo $t = t_n$ $\qquad y'(t_n) = f(t_n, y(t_n)) \qquad (1)$

appx $y'(t_n)$ con la df in avanti

$$y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\underbrace{t_{n+1} - t_n}_{h}} - \frac{1}{2} y''(\xi_n) \left(\overbrace{t_{n+1} - t_n}^{h}\right)^2 \qquad (2)$$

sost (2) in (T) :

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{1}{2} y''(\xi_n) h^2 = f(t_n, y(t_n))$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n)$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

METODI di EULERO in AVANTI

ho sfruttato $\delta_+ f$ per appx la y'

conosco y_0 $\Rightarrow$ $u_0 = y_0$

$n = 0$ $\quad u_1 = u_0 + h f(t_0, u_0)$ è l'appx di $y(t_1)$

$n = 1$ $\quad u_2 = u_1 + h f(t_1, u_1) \sim y(t_2)$

$\vdots$